SỞ GD&ĐT QUẢNG NINH
TRƯỜNG THPT CHUYÊN HẠ LONG

ĐỀ THI OLYMPIC TRẠI HÈ HÙNG VƯƠNG LẦN THỨ X
MÔN: TOÁN - KHỐI: 10
Ngày thi: 01 tháng 08 năm 2014
Thời gian: 180 phút
Đề thi gồm: 01 trang.

ĐỀ CHÍNH THỨC

Bài 1. ***(4 điểm)*** Giải bất phương trình

$$\sqrt{7x^2-7x-9}-\sqrt{x^2-x-6}<2\sqrt{2x+1}.$$

Bài 2. ***(4 điểm)*** Cho $ABCD$ là tứ giác nội tiếp có giao điểm P của hai đường phân giác của các góc $\widehat{BAD},\widehat{BCD}$ nằm trên đường chéo BD. Gọi Q là trung điểm của BD. Đường thẳng qua C song song với AD cắt tia AQ tại K nằm ngoài tứ giác $ABCD$. Chứng minh rằng tam giác CDK là tam giác cân.

Bài 3. ***(4 điểm)*** Cho ba số thực dương x,y và z thay đổi nhưng luôn thỏa mãn điều kiện $xy+yz+zx=3xyz$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

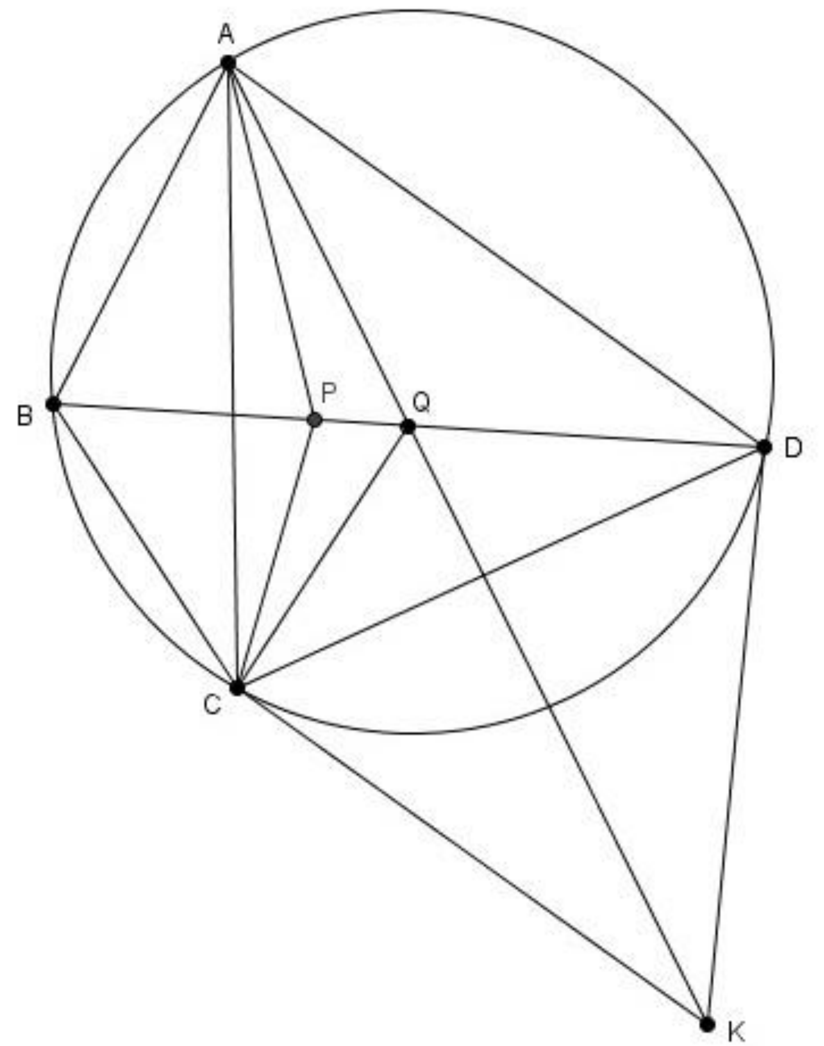
$$S=\frac{y^2}{x(y^2+1)}+\frac{z^2}{y(z^2+1)}+\frac{x^2}{z(x^2+1)}.$$

Bài 4. ***(4 điểm)*** Mỗi điểm trong mặt phẳng được tô bởi một trong hai màu xanh hoặc đỏ. Chứng minh rằng tồn tại tam giác mà ba đỉnh và trọng tâm cùng màu.

Bài 5. ***(4 điểm)*** Chứng minh rằng tồn tại 16 số tự nhiên liên tiếp sao cho không có số nào trong 16 số đó có thể biểu diễn được dưới dạng $\left|7x^2+9xy-5y^2\right|$ $(x,y\in\mathbb{Z})$.

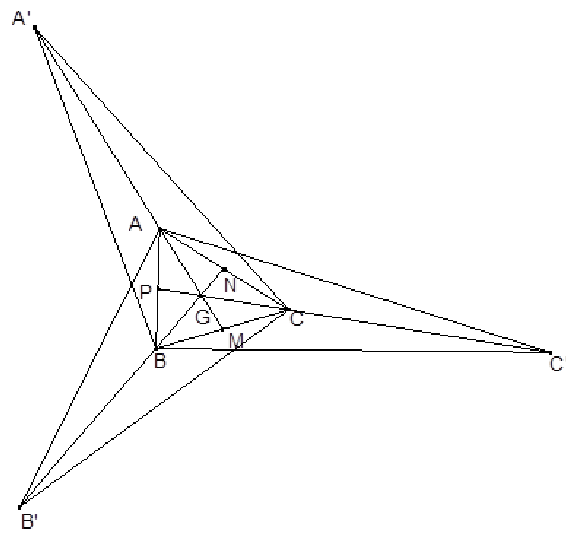
--------------------HẾT--------------------

BÀI	ĐÁP ÁN	ĐIỂM
Bài 1	Điều kiện xác định: $x \geq 3$. Bất phương trình tương đương với $\Leftrightarrow 7x^2 - 7x - 9 < \left[\sqrt{(x+2)(x-3)} + 2\sqrt{2x+1}\right]^2$ $\Leftrightarrow 6x^2 - 14x - 7 < 4\sqrt{(2x+1)(x-3)}.\sqrt{x+2}$	**1,0**
	$\Leftrightarrow 3\left(2x^2 - 5x - 3\right) - 4\sqrt{2x^2 - 5x - 3}.\sqrt{x+2} + (x+2) < 0.$	**1,0**
	$\Leftrightarrow 3 \cdot \dfrac{2x^2 - 5x - 3}{x+2} - 4\sqrt{\dfrac{2x^2 - 5x - 3}{x+2}} + 1 < 0.$	**1,0**
	$\Leftrightarrow \begin{cases} 18x^2 - 46x - 29 > 0 \\ 2x^2 - 6x - 5 < 0 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x < \dfrac{23 - \sqrt{1051}}{18} \\ x > \dfrac{23 + \sqrt{1051}}{18} \end{array}\right. \\ \dfrac{3 - \sqrt{19}}{2} < x < \dfrac{3 + \sqrt{19}}{2} \end{cases}$ Kết hợp với điều kiện xác định, ta được $\dfrac{23 + \sqrt{1051}}{18} < x < \dfrac{3 + \sqrt{19}}{2}$. **-----** **Nguồn: Bắc Giang**	**1,0**

<table>
<tr>
<td>Bài 2</td>
<td>

Vì tứ giác ABCD nội tiếp nên theo định lý Ptôlêmê ta có:
AB.CD+AD.BC=AC.BD(1)
Vì AP, CP tương ứng là phân giác góc A và C nên
$\frac{AB}{AD}=\frac{PB}{PC}=\frac{CB}{CD}\Rightarrow AB.CD=AD.BC(2)$</td>
<td>1,0</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td>Từ (1) và (2) suy ra $2AB.CD=AC.BD$
Mà Q là trung điểm BD nên BD=2BQ
Do đó: AB.CD=AC.BQ hay $\frac{AB}{AC}=\frac{BQ}{CD}$.Mà $\widehat{ABQ}=\widehat{ACD}$ (góc nội</td>
<td>1,0</td>
</tr>
</table>

	tiếp chắn cung AD) nên $\Delta ABQ \backsim \Delta ACD \Rightarrow \widehat{AQB} = \widehat{ADC}$	
	Mà $\widehat{AQB} = \widehat{DQK}$ (đối đỉnh) $\widehat{ADC} = \widehat{DCK}$ (so le trong)(*) Suy ra $\widehat{DQK} = \widehat{DCK} \Rightarrow$ Tứ giác CQDK nội tiếp $\Rightarrow \widehat{BQC} = \widehat{CKD}$ (**)	**1,0**
	Chứng minh tương tự $\Delta QBC \backsim \Delta DAC \Rightarrow \widehat{BQC} = \widehat{ADC}$(***) Từ (*),(**),(***) $\Rightarrow \widehat{DCK} = \widehat{CKD}$ Suy ra tam giác DCK cân tại D. **------** **Nguồn: Hà Giang**	**1,0**
Bài 3	Ta sẽ chứng minh giá trị nhỏ nhất của S bằng $\frac{3}{2}$. Đặt $\frac{1}{x} = a, \frac{1}{y} = b, \frac{1}{z} = c$. Ta có a,b,c là các số thực dương, a+b+c=3 và $S = \frac{a}{1+b^2} + \frac{b}{1+c^2} + \frac{c}{1+a^2}$.	**1,0**
	Áp dụng bất đẳng thức giữa trung bình cộng và trung bình nhân ta được $\frac{a}{1+b^2} = a - \frac{ab^2}{1+b^2} \geq a - \frac{ab^2}{2b} = a - \frac{ab}{2}$. Viết 2 kết quả tương tự và cộng lại ta được $S \geq a + b + c - \frac{ab+bc+ca}{2}$.	**1,0**
	Dùng a+b+c=3 và $(a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca)$ ta có $S \geq \frac{3}{2}$.	**1,0**
	Mà khi x=y=z=1 thì $S = \frac{3}{2}$. Suy ra điều phải chứng minh. **-------** **Nguồn: Lào Cai**	**1,0**
Bài 4	Lấy 5 điểm tùy ý sao cho không có 3 điểm nào thẳng hàng trong mặt phẳng. Khi đó vì chỉ dùng hai màu để tô các điểm nên theo nguyên lý Dirichlet phải tồn tại ba điểm trong số đó cùng màu. Giả sử đó là 3 điểm *A*, *B*, *C* màu đỏ.	**1,0**
	Gọi *G* là trọng tâm tam giác *ABC*. Nếu *G* có màu đỏ thì ta được tam giác có 3 đỉnh và trọng tâm màu đỏ. Nếu *G* có màu xanh. Kéo dài *GA*, *GB*, *GC* các đoạn *AA'*, *BB'*, *CC'* sao cho *AA'=3GA*,	**2,0**

	BB'=3*GB*, *CC'*=3*GC*. Gọi *M*, *N*, *P* tương ứng trung điểm *BC*, *CA*, *AB* thì *AA'*=3*GA*=6*GM*, suy ra *AA'*=2AM. Tương tự *BB'*=2*BN*, *CC'*=2*CP*. Do đó tam giác *A'BC*, *B'CA*, *C'AB* tương ứng nhận *A*, *B*, *C* làm trọng tâm. Mặt khác ta cũng có tam giác *ABC*, *A'B'C'* có cùng trọng tâm *G*.  	
	Có hai trường hợp có thể xảy ra a) Nếu *A'*, *B'*, *C'* có cùng màu xanh, khi đó tam giác *A'B'C'* và trọng tâm *G* có màu xanh. b) Nếu ít nhất một trong các điểm *A'*, *B'*, *C'* màu đỏ. Không giảm tổng quát, giả sử *A'* đỏ. Khi đó tam giác *A'BC* và trọng tâm *A* có màu đỏ. **---------** **Nguồn: Thái Nguyên**	**1,0**
Bài 5	Đặt $\left\|7x^2+9xy-5y^2\right\|=A$. Ta có $28A=\left\|(14x+9y)^2-13.17.y^2\right\|$, xét số dư khi chia A cho 9, 13, 17, ta thu được	**1,0**
	* A chia cho 9 không có số dư là 3, 6. * A chia cho 13 không có số dư là 1, 3, 4, 9, 10, 12. * A chia cho 17 không có số dư là 1, 2, 4, 8, 9, 13, 15, 16.	**1,0**
	Theo định lý thặng dư Trung Hoa, tồn tại số nguyên dương n thỏa mãn	**1,0**

	$\begin{cases} n \equiv -4 \pmod{9} \\ n \equiv -2 \pmod{13} \\ n \equiv 0 \pmod{17}. \end{cases}$	
	Rõ ràng là : * $n+7, n+10$ không có dạng $\left\|7x^2+9xy-5y^2\right\|$. * $n+3, n+5, n+6, n+11, n+12, n+14$ không có dạng $\left\|7x^2+9xy-5y^2\right\|$. * $n+1, n+2, n+4, n+8, n+9, n+13, n+15, n+16$ không có dạng $\left\|7x^2+9xy-5y^2\right\|$. Từ đó suy ra tồn tại 16 số $n+1, n+2, \ldots, n+16$ thỏa mãn bài toán. **--------** **Nguồn: Phú Thọ**	**1,0**