SỞ GD&ĐT QUẢNG NINH
TRƯỜNG THPT CHUYÊN HẠ LONG

ĐỀ CHÍNH THỨC

ĐỀ THI OLYMPIC TRẠI HÈ HÙNG VƯƠNG LẦN THỨ X
MÔN: TOÁN - KHỐI: 11
Ngày thi: 01 tháng 08 năm 2014

Thời gian: 180 phút

Đề thi gồm: 1 trang.

Câu 1 (4 điểm)

Cho dãy số (u_n) xác định như sau

$$\begin{cases} u_1 = 2014 \\ u_{n+1} = u_n^2 + (1-2a)u_n + a^2 \ \forall n = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

Tìm điều kiện của $a \in \mathbb{R}$ để dãy số (u_n) có giới hạn hữu hạn và tính giới hạn đó.

Câu 2 (4 điểm)

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm O. Đường tròn tâm I tiếp xúc với hai cạnh AC, BC lần lượt tại E, F và tiếp xúc trong với đường tròn tâm O tại điểm P. Một đường thẳng song song với AB và tiếp xúc với đường tròn tâm I tại điểm Q nằm trong tam giác ABC.

a) Gọi K, L lần lượt là giao điểm thứ hai của PE và PF với (O). Chứng minh rằng KL song song với EF.

b) Chứng minh rằng $\widehat{ACP} = \widehat{QCB}$.

Câu 3 (4 điểm)

Cho $P(x)$ và $Q(x)$ là các đa thức với hệ số thực, có bậc bằng 2014 và có hệ số cao nhất bằng 1. Chứng minh rằng nếu phương trình $P(x) = Q(x)$ không có nghiệm thực thì phương trình sau có nghiệm thực

$$P(x+2013) = Q(x-2013).$$

Câu 4 (4 điểm)

Trong mặt phẳng cho $2n+1$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ đường thẳng phân biệt sao cho không có hai đường nào song song hoặc vuông góc và không có ba đường nào đồng quy. Chúng cắt nhau tạo thành các tam giác. Chứng minh rằng số các tam giác nhọn tạo thành không vượt quá $\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Câu 5 (4 điểm)

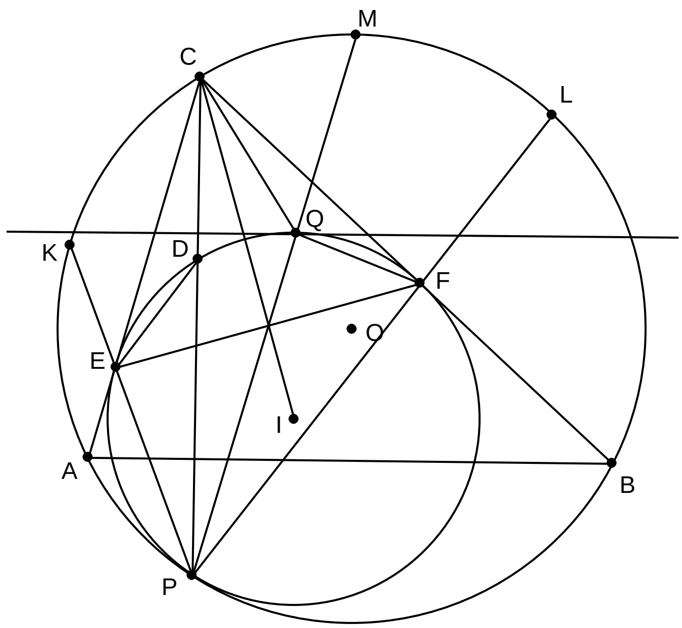
Tìm tất cả các bộ ba số $(x; y; z)$ nguyên dương thỏa mãn

$$1 + 4^x + 4^y = z^2.$$

---------------------------------HẾT---------------------------------

ĐÁP ÁN VÀ BIỂU ĐIỂM TOÁN KHỐI 11

Bài	Lời giải	Điểm
Bài 1	Ta có: $u_{n+1}-u_n=(u_n-a)^2\ge 0\Rightarrow u_{n+1}\ge u_n;\ \forall n=1,2,3,...$ * Suy ra dãy số (u_n) tăng ; từ đó dãy số (u_n) có giới hạn hữu hạn khi và chỉ khi dãy bị chặn trên. Giả sử tồn tại $\lim u_n=L\ (L\in\mathbb{R})$, thì chuyển qua giới hạn hệ thức $u_{n+1}=u_n^2+(1-2a)u_n+a^2$ ta có: $L=L^2+(1-2a)L+a^2\Leftrightarrow L=a$	1.0
Sơn La	- Nếu có chỉ số $k\in\mathbb{N}^*$ mà $u_k>a$ thì $u_n>a;\ \forall n\ge k$ nên $L>a$ trái với kết quả $\lim u_n=L=a$. Do đó: $u_k\le a$ với mọi $k=1,2,...$ hay $u_n^2-(1-2a)u_n+a^2\le a,\ \forall n=1,2,3,...$ nói riêng $u_1^2-(1-2a)u_1+a^2\le a\Leftrightarrow a-1\le u_1\le a\Leftrightarrow a-1\le 2014\le a$ từ đó ta được $2014\le a\le 2015$.	1.0
	* Đảo lại: Nếu $2014\le a\le 2015\Leftrightarrow a-1\le u_1\le a$ $\Rightarrow(u_1-a+1)(u_1-a)\le 0\Rightarrow u_1^2+(1-2a)u_1+a^2-a\le 0\Rightarrow u_2\le a$ và $u_1\le u_2\Rightarrow a-1\le u_2\le a$	1.0
	Bằng quy nạp ta chứng minh được $a-1\le u_n\le a,\ \forall n=1,2,3,...$ (H/s trình bày ra) Như vậy dãy (u_n) tăng, bị chặn trên bới a, do đó dãy (u_n) có giới hạn hữu hạn. *Kết luận:* Với điều kiện $2014\le a\le 2015$ thì dãy số (u_n) có giới hạn hữu hạn và $\lim u_n=a$	1.0
Bài 2	a. Xét phép vị tự $V_{(P;k)}$ tâm P biến đường tròn (I) thành đường tròn (O) nên biến điểm E thành điểm K và biến điểm F thành điểm L nên KL//EF.	1.0
Hòa Bình	b. Gọi D là giao điểm thức hai của đường thẳng PC với đường tròn tâm I, và M là giao điểm thứ hai của đường tròn tâm O với PQ. Xét phép vị tự $V_{(P;k)}$ biến đường tròn tâm I thành đường tròn tâm O, ta có phép vị tự $V_{(P;k)}$ biến E, D, Q, F lần lượt thành K, C, M, L. Do OK là ảnh của IE qua $V_{(P;k)}$, dẫn đến $OK//IE$ mà $IE\perp AC$ nên $OK\perp AC$, suy ra K là điểm chính giữa của cung AC. Chứng minh tương tự ta có L là điểm chính giữa của cung BC, M là điểm chính giữa của cung AB.	1.0

<table>
<tr>
<td></td>
<td>


Nếu $AC \le BC$ thì ta có
$\overset{\frown}{BM} = \overset{\frown}{MA} \Leftrightarrow \overset{\frown}{BL} + \overset{\frown}{LM} = \overset{\frown}{MK} + \overset{\frown}{KA}$
$\Leftrightarrow \overset{\frown}{LC} + \overset{\frown}{LM} = \overset{\frown}{MK} + \overset{\frown}{CK}$
$\Leftrightarrow 2\overset{\frown}{LM} + \overset{\frown}{MC} = \overset{\frown}{MC} + 2\overset{\frown}{CK}$
$\Leftrightarrow \overset{\frown}{LM} = \overset{\frown}{CK}$
Trường hợp $AC > BC$ ta cũng chỉ ra được $\overset{\frown}{LM} = \overset{\frown}{CK}$
$\Rightarrow \overset{\frown}{DE} = \overset{\frown}{FQ}$ (tính chất phép vị tự).
$\Rightarrow \widehat{DEC} = \widehat{QFC}$ (góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung chắn hai cung bằng nhau) và DE = QF.

Lại có CE = CF theo tính chất của hai tiếp tuyến kẻ từ một điểm.
Suy ra $\Delta CED = \Delta CFQ$, dẫn đến $\widehat{ECD} = \widehat{FCQ}$. Từ đó ta có điều phải chứng minh.
</td>
<td>--------

1.0

1.0</td>
</tr>
<tr>
<td>Bài 3

Vĩnh Phúc</td>
<td>
Giả sử $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_{2013}x^{2013} + x^{2014}$
$Q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + ... + b_{2013}x^{2013} + x^{2014}$
Khi đó $P(x) - Q(x) = a_0 - b_0 + (a_1 - b_1)x + (a_2 - b_2)x^2 + ... + (a_{2013} - b_{2013})x^{2013}$.
Nếu $a_{2013} - b_{2013} \ne 0$ thì đa thức $P(x) - Q(x)$ là một đa thức bậc lẻ nên nó luôn có ít nhất một nghiệm thực (mâu thuẫn). Do đó $a_{2013} = b_{2013} = t$.

Ta có
$P(x+2013) = a_0 + a_1(x+2013) + a_2(x+2013)^2 + ... + t(x+2013)^{2013} + (x+2013)^{2014}$

$Q(x-2013) = b_0 + b_1(x-2013) + b_2(x-2013)^2 + ... + t(x-2013)^{2013} + (x-2013)^{2014}$

Khi đó ta có:
</td>
<td>1.0

2.0</td>
</tr>
</table>

	$P(x+2013)-Q(x-2013)=R(x)+2.C_{2014}^{1}2013.x^{2013}$, trong đó $R(x)$ là một đa thức có bậc nhỏ hơn 2013. --- Do đó $P(x+2013)-Q(x-2013)=R(x)+2.C_{2014}^{1}2013.x^{2013}$ là một đa thức với hệ số thực bậc lẻ nên đa thức này luôn có ít nhất một nghiệm thực.	-------- 1.0
Bài 4 **Yên Bái**	Gọi số tam giác tạo thành là $f(n)$. Ta phải chứng minh $f(n)\le\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}\quad(1),\forall n\in\mathbb{N}^*$ Với ba đường thẳng bất kỳ trong số các đường thẳng đã cho luôn cắt nhau tạo thành một tam giác hoặc nhọn hoặc tù. Gọi $g(n)$ là số các tam giác tù. Ta gọi một tam giác tạo bởi ba đường thẳng a,b,c nào đó là: "giả nhọn cạnh a" nếu các góc chung cạnh a của tam giác đó là các góc nhọn. Chọn một đường thẳng d nào đó và coi nó là trục hoành, các đường thẳng còn lại được chia làm hai tập: Tập T^+ là các đường thẳng với hệ số góc dương, Tập T^- là tập các đường thẳng với hệ số góc âm. Hai đường thẳng tạo với d một tam giác "giả nhọn" nếu một đường thẳng thuộc tập T^+ và một đường thẳng thuộc tập T^-. Gọi p là số đường thẳng thuộc T^+ và q là số các đường thẳng thuộc tập T^-. Khi đó $p+q=2n$ và số tam giác "giả nhọn cạnh d" là pq. Ta có $pq\le\left(\dfrac{p+q}{2}\right)=n^2$ --- Nhưng do d có thể là đường thẳng bất kỳ trong số $2n+1$ đường thẳng đã cho nên ta có số cặp (đường thẳng d ; tam giác "giả nhọn cạnh d") sẽ nhỏ hơn hoặc bằng $n^2(2n+1)$. --- Trong cách tính trên mỗi tam giác nhọn được tính 3 lần (theo 3 cạnh) còn mỗi tam giác tù được tính 1 lần nên $$3f(n)+g(n)\le n^2(2n+1)\quad(1)$$ --- Thế nhưng tổng số các tam giác là: $$C_{2n+1}^{3}=f(n)+g(n)=\frac{(2n+1)2n(2n-1)}{6}\quad(2)$$ Từ (1) và (2) suy ra $$2f(n)\le n^2(2n+1)-(f(n)+g(n))=n^2(2n+1)-\frac{(2n+1)2n(2n-1)}{6}$$ $$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{3}$$	1.0 -------- 1.0 -------- 1.0 -------- 1.0

	hay $f(n)\le \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$	
Bài 5 **Tuyên Quang**	Không mất tổng quát, giả sử $x\le y$. Ta thấy $$1+4^x+4^y=(1+2^y)^2+2^{2x}-2^{y+1}.$$ Do đó: Nếu $2x<y+1$ thì $(2^y)^2<1+4^x+4^y=(1+2^y)^2+2^{2x}-2^{y+1}<(2^y+1)^2$. Suy ra không tồn tại z thỏa mãn. -- Nếu $2x=y+1$ thì $1+4^x+4^y=(1+2^y)^2\Rightarrow z=1+2^y$. Suy ra $(x;2x-1;1+2^{2x-1})$ là nghiệm của phương trình với $x\in\mathbb{N}^*$. -- Nếu $2x>y+1$ thì $pt\Leftrightarrow 4^x(1+4^{y-x})=(z-1)(z+1)$ (*). Vì $\gcd(z-1;z+1)=2$ và $x>1$ nên $z-1\,\vdots\,2^{2x-1}$ hoặc $z+1\,\vdots\,2^{2x-1}$. Nếu $z-1\,\vdots\,2^{2x-1}$ thì từ (*) suy ra $$z+1\le 2(1+4^{y-x})\le 2(1+4^{x-2})=2(1+2^{2x-4})<2^{2x-1}-2,\forall x>1.$$ Điều này là vô lí vì $z-1\,\vdots\,2^{2x-1}\Rightarrow z+1\ge 2^{2x-1}+2$. -- Tương tự, Nếu $z+1\,\vdots\,2^{2x-1}$ thì từ (*) suy ra $$z-1\le 2(1+4^{y-x})\le 2(1+4^{x-2})=2(1+2^{2x-4})<2^{2x-1}-2,\forall x>1.$$ Điều này là vô lí vì $z+1\,\vdots\,2^{2x-1}\Rightarrow z-1\ge 2^{2x-1}-2$. Vậy các bộ số cần tìm là $(x;2x-1;1+2^{2x-1}),(2x-1;x;1+2^{2x-1})$ là nghiệm của phương trình với mọi $x\in\mathbb{N}^*$.	1.0 -------- 1.0 -------- 1.0 -------- 1.0