PHẦN II: HƯỚNG DẪN LỜI GIẢI VÀ TRẢ LỜI

1 BA NHÀ THÔNG THÁI

Nhà thông thái đó đã suy luận như sau:

- Ai cũng cười vì tưởng trán mình không nhọ, hai người kia cười nhau còn mình thì cười họ.

- Thế nhưng, nếu trán tôi không nhọ thì hai người kia đều sẽ phát hiện được ngay trán mình bị nhọ. Chẳng hạn người thứ ba, khi thấy người thứ hai cười anh ta biết ngay là cười anh ta chứ không phải cười tôi (vì tôi không bị nhọ).

- Trong thực tế hai người kia đều cười và không phát hiện ra trán mình bị nhọ. Vậy trán tôi cũng bị nhọ.

2 HAI CHỊ EM SINH ĐÔI

Kết quả: Đầu tiên tôi nói chuyện với cô Nhị, sau đó với cô Nhất. Tôi gặp họ vào thứ ba.

Thật vậy:

- Từ câu trả lời của cô gái đầu ("hôm qua chủ nhật", ta nhận thấy nếu câu đó đúng, nghĩa là hôm đó thứ hai, mà nói đúng vào thứ hai thì chỉ là cô Nhị. Do vậy cáu trước đó: "Tôi là Nhất" cũng là đúng, hay cô đó là cô Nhất. Đã xảy ra điều vô lý: cô gái đầu vừa là Nhất, vừa là Nhị. Vậy câu

"Hôm qua chủ nhật" là sai, và câu trước đó: "Tôi là Nhất" cũng sai. Ta được một kết quả: Cô gái đầu là Nhị.

Ngày tôi gặp hai cô là ngày cô Nhị nói sai. Vậy chỉ là một trong 3 ngày thứ ba, thứ năm, thứ bảy (1).

- Cô gái sau là cô Nhất. Cô ta nói sai vào những ngày: thứ hai, thứ ba và thứ tư. Do đó câu trả lời "Ngày thứ tư tôi luôn luôn nói thật" là sai. Vậy là ngày tôi gặp hai cô là ngày cô Nhất nói sai (2).

- Từ (1) và (2) ta được ngày đó là thứ ba.

3 CỤ GIÀ NÓI THẦM ĐIỀU GÌ?

Đáp án:

Thông qua việc làm của cụ già và hành động 2 kỵ sĩ phi như bay về đích ta thấy một khả năng có thể mà cụ già đã nói thầm với từng kỵ sĩ trước khi buông tay họ ra là: "Hãy nhảy lên ngựa của đối phương mà phi về đích trước". Và như thế, khi cụ già buông tay họ ra thì ai nấy đều chạy nhanh đến ngựa của người kia, nhảy lên và phóng về đích trước, cốt sao ngựa mình về sau.

4 DU KHÁCH ĐANG Ở ĐÂU?

Đáp án:

Người khách có thể đặt câu hỏi đối với người đầu tiên mà anh ta gặp như sau: "Ngài là người của thành phố này phải không?":

- Nếu người khách đang ở thành phố A, thì luôn nhận được câu trả lời "Vâng", và nếu đang ở thành phố B thì luôn nhận được câu trả lời "Không".

- Thật vậy: Khi người khách đang ở thành phố A, người trả lời là dân thành phố A thì anh ta trả lời là "Vâng". Còn người trả lời là dân thành phố B thì anh ta sẽ nói dối, cũng là "vâng". Khi người khách đang ở thành phố B cũng lập luận tương tự.

5 QUÂN XANH, QUÂN ĐỎ

Khi người phụ trách hỏi An: "Em là quân gì ?", thì An chỉ có thể trả lời: "Em quân đỏ". Thật vậy, nếu An quân đỏ thì sẽ trả lời đúng "Em quân đỏ", còn nếu là quân xanh thì sẽ trả lời sai cũng là "Em quân đỏ".

Từ đó suy ra ngay Dũng quân đỏ, Cường quân xanh.

6 ĐẠO LUẬT TÀN ÁC

Khi người lính hỏi: "Vì sao anh tới đây?", nếu người nông dân trả lời: "Tôi đến đây để anh treo cổ tôi lên", thì người lính sẽ không biết xử trí ra sao với người nông dân theo đạo luật của nhà vua.

Thật vậy:

- Nếu đem treo cổ, nghĩa là người nông dân nói đúng, theo đạo luật của nhà vua phải dìm anh ta xuống nước.

- Nếu đem dìm xuống nước. Nghĩa là người nông dân nói sai, theo đạo luật nhà vua lại phải đem treo cổ.

Đằng nào cũng khó xử cả.

7 BỨC CHÂN DUNG AI?

Người trong bức chân dung là con của anh Trung.

Thật vậy, bố của người đang trả lời các bạn (chính là Trung) chỉ có một người con trai duy nhất. Vậy người con trai duy nhất đó là Trung. Suy ra Trung là bố người trong ảnh.

8 ANH THỢ CẠO TRONG THÔN

Mâu thuẫn nảy sinh từ chính định nghĩa khái niệm anh thợ cạo. Định nghĩa không chỉ rõ anh thợ cạo phải làm gì đối với bản thân anh ta.

Ghi chú: Đây là một nghịch lý (loại nghịch lý Russel) trong những nghịch lý của lý thuyết tập hợp (kể cả câu trả lời ở bài 6). Bạn đọc có thể tham khảo trong cuốn sách "Lý thuyết tập hợp là gì" của tác giả Hoàng Tuỵ, Nhà xuất bản Giáo dục, 1964.

9 THÀNH CÔNG CỦA TUỔI TRẺ

Ta có thể giải thích sự thành công của người bạn nhỏ như sau:

Ký hiệu hai người bạn chơi cờ giỏi là A và B. Trên bàn cờ với A người bạn nhỏ đi quân trắng thì bên bàn cờ với B cậu ta đi quân đen. Khi A đi thế nào thì cậu ta đi đúng như thế trên bàn cờ với B, và đợi cho B đi, cậu ta lại đi đúng như B trên bàn cờ với A. Cuộc chơi cờ được lặp lại như vậy cho tới khi kết thúc.

Thực ra mọi diễn biến trên hai bàn cờ giống hệt nhau. Người bạn nhỏ chỉ làm khâu trung gian để A và B chơi với nhau. Nếu A thắng thì cậu ta thắng B và ngược lại. Nếu hoà với một người thì cũng hoà với người kia.

10 NÓI TIÊN TRI

Người triết gia đã xác định các thần như sau:

Thần bên trái không thể là thần Sự Thật vì đã nói thần ngồi giữa là thần Sự Thật. Thần ngồi giữa cũng không thể là thần Sự Thật vì đã nói mình là thần Mưu Mẹo. Vậy thần bên phải là thần Sự Thật. Từ đó suy ra thần ngồi giữa là thần Lừa Dối và thần bên trái là thần Mưu Mẹo.

11 NGƯỜI THÔNG MINH NHẤT

Người thắng cuộc (người thông minh nhất) là người suy nghĩ nhanh hơn những người khác như sau:

- Giả sử tôi đội mũ đen, hai người kia đều nhìn thấy và suy nghĩ "Nếu mình cũng đội mũ đen thì người kia (người thứ ba) sẽ biết và nói ngay anh ta đội mũ trắng. Thế nhưng anh ta không nói gì, nên mình không phải đội mũ đen mà là mũ trắng". Vậy tôi đội mũ đen thì hai người kia sẽ biết và nói ngay được trên đầu họ mũ gì. Đằng này hai người kia đều im lặng, nên tôi không thể đội mũ đen mà là mũ trắng.

12 THỬ TÀI ĐOÁN MŨ

Dựa vào những biểu hiện của An và Minh, Tuấn có thể xác định được màu mũ trên đầu mình bằng suy đoán như sau:

- Trong 5 mũ mang ra có 2 mũ trắng. An ngồi dưới cùng mà không biết mình đội mũ gì, vậy mũ của Minh và Tuấn không cùng là màu trắng (nhiều nhất là một mũ trắng).

- Nếu Tuấn đội mũ trắng thì từ câu trả lời của An, Minh sẽ biết ngay là mình đội mũ đen. Đằng này Minh cũng không biết. Từ đó Tuấn xác định được mũ trên đầu mình là màu đen.

13 CHỌN HOÀNG THÁI TỬ

Trong 4 chàng trai ít ra phải có 3 người đội mũ miện vàng, vì nếu không như vậy, một người đội mũ miện vàng sẽ nhìn thấy số mũ miện vàng nhiều hơn và không đứng lên.

Vậy số mũ miện vàng là 3 hoặc 4.

- Nếu số mũ miện bạc là 3 thì một trong 3 chàng trai đội mũ miện vàng sẽ suy đoán ra ngay mũ miện vàng trên đầu mình bằng cách như sau: "Nếu tôi đội mũ miện bạc thì số mũ miện bạc là 2 và những người đội mũ miện vàng kia sẽ không đứng lên. Đằng này tất cả đã đứng lên. Vậy trên đầu tôi là mũ miện vàng".

- Vì sau hồi lâu mới có người lên tiếng, nên số mũ miện vàng phải là 4. Chàng trai thông minh nhất đã suy đoán được mũ miện vàng trên đầu mình bằng cách sau: "Ba người kia đội mũ miện vàng, nếu tôi đội mũ miện bạc thì ắt có người suy đoán được ngay (theo cách trên) rằng anh ta đội mũ miện vàng. Nhưng họ đều đứng nguyên im lặng. Vậy trên đầu tôi là mũ miện vàng chứ không phải bạc.

14 CHUYỆN LY KỲ TRÊN TÀU HỎA

Ta lần lượt xét các khả năng có thể như sau:

a) Giả sử trong toa chỉ có 1 người nhọ mặt: Người bị nhọ tìm khắp trong toa không thấy ai bị nhọ nên biết ngay là mình bị nhọ và đi rửa ngay lần tàu đứng đầu tiên. Vậy số người bị nhọ phải nhiều hơn 1.

b) Giả sử trong toa có 2 người bị nhọ mặt: Mỗi người bị nhọ đều nhìn thấy một người bị nhọ, vì thế lần tàu dừng thứ nhất không có ai đi rửa cả. Sau đó cả hai đều phát hiện ra mình bị nhọ (vì nếu mình không, anh kia đã đi rửa ở lần tàu dừng đầu tiên rồi) và cả hai đều đi rửa ở lần tàu dừng thứ hai. Vậy số người bị nhọ lớn hơn 2.

c) Giả sử trong toa có 3 người bị nhọ: Mỗi người bị nhọ đều nhìn thấy 2 người bị nhọ. Vì biết suy đoán đúng nên đều chờ xem 2 người kia có đi rửa ở lần tàu dừng thứ 2 hay không. Khi thấy 2 người kia đều không đi rửa, cả 3 đều phát hiện ra mình bị nhọ và đi rửa ở lần tàu dừng thứ ba.

d) Giả sử trong toa có 4 người bị nhọ mặt: Lập luận tương tự như trường hợp C, suy ra cả 4 người đều bị nhọ đều đi rửa ở lần tàu dừng thứ tư. Giả thiết bài toán sau lần tàu dừng thứ tư mới hết người bị nhọ. Vậy trong toa có 4 người bị nhọ.

15 NGƯỜI QUEN TRONG HỘI NGHỊ

Trong hội nghị số người quen của mỗi người là một số nguyên không âm. Ta hãy cộng tất cả các số đó lại. Vì mỗi cặp (2 người) quen nhau được tính 2 lần nên tổng đó là một số chẵn. Từ đó suy ra các số lẻ trong tổng phải là chẵn, ta có điều cần phải chứng minh.

16 NHÓM 6 NGƯỜI

Ký hiệu A là một thành viên của nhóm.

- Giả sử có 3 người khách quen A. Nếu trong số 3 người có 2 người quen nhau, suy ra A và 2 người đó quen nhau từng đôi. Ngược lại, trong 3 người đó không có 2 người nào quen nhau, thì 3 người đó thoả mãn khả năng thử hai của bài toán - có 3 người không quen nhau từng đôi.

- Giả sử không có tới 3 người quen A, số người khác A là 5, vậy có ít ra 3 người không quen A. Nếu giữa họ có 2 người không quen nhau thì 2 người đó và A thoả mãn khả năng thứ hai của bài toán. Ngược lại trong 8 người đó không có 2 người không quen nhau, thì 3 người đó quen nhau từng đôi - xảy ra khả năng thứ nhất của bài toán.

Vậy bài toán đã được chứng minh.

17 CHỈ CÓ MỘT NGƯỜI QUEN

Ta có A quen B thì B cũng quen A.

Giả sử trong hội nghị này A có số người quen lớn nhất (k người quen).

Từ giả thiết bài toán ta có: số người quen của các đại biểu quen A là những số khác nhau, tối thiểu là 1 vì ít ra là quen A, tối đa là k vì A có số người quen lớn nhất mới là k. Suy ra có đúng một đại biểu trong số các đại biểu quen A có duy nhất 1 người quen.

Vậy trong hội nghị này có ít ra một đại biểu duy nhất 1 người quen.

18 THÔNG BÁO CỦA THƯ VIỆN

Người phụ trách thư viện có thể chọn hai thời điểm thông báo thoả mãn yêu cầu bài toán là:

t1. Thời điểm người ra về đầu tiên đang làm thủ tục để về.

t2. Thời điểm người đến thư viện cuối cùng vừa tới và sau đó người phụ trách thư viện treo biển hết giờ vào thư viện.

Trường hợp t1 nhỏ hơn t2: Giả sử có độc giả nào đó đến thư viện trong ngày mà lại không có mặt cả hai thời điểm trên, nghĩa là anh ta đến sau thời điểm t1 và ra về trước thời điểm t2. Điều đó cũng có nghĩa: anh ta, người ra về đầu tiên và người đến thư viện cuối cùng không có 2 người nào gặp nhau trong thư viện, trái với giả thiết bài toán. Vậy t1 và t2 thoả mãn yêu cầu bài toán.

Trường hợp t1 không nhỏ hơn t2: Người phụ trách thư viện chỉ cần thông báo một lần ở một thời điểm nào đó giữa t1 và t2.

19 THI ĐẤU BÓNG BÀN

Bài toán có thể giải bằng nhiều cách, chẳng hạn:

Cách 1: Giả sử A là vận động viên thắng nhiều nhất. Nếu A không thoả mãn bài toán thì khi đó tồn tại vận động viên B không thua A và không thua cả những vận động viên thua A, suy ra B thắng nhiều hơn A, trái với giả thuyết về A. Vậy A thoả mãn bài toán.

Cách 2: Tất cả các vận động viên ở trong một phòng. Một vận động viên dẫn tất cả những vận động viên thua anh ta ra ngoài (có thể không dẫn ai - anh ta chỉ ra một mình). Nếu trong phòng còn người thì một vận động viên nào đó lại làm như vừa nêu... Sự việc được tiếp diễn như vậy cho tới khi trong phòng không còn ai hoặc chỉ còn một người.

Vận động viên ở vai trò người dẫn là người thắng những vận động viên anh ta dẫn ra và cả những người ở vai trò người dẫn ra trước đó. Nếu trong phòng không còn ai thì người dẫn cuối cùng thoả mãn bài toán.

20 XĂNG VÀ DẦU

Sau 3 lần trao đổi, trọng lượng dung dịch ở mỗi can không đổi. Trong can xăng đã có một lượng xăng được thay thế bằng dầu. Lượng đầu trong can xăng đúng bằng trọng lượng xăng đã lấy ra, lượng xăng đó nằm hoàn toàn trong can dầu. Vậy trọng lượng xăng ở trong can dầu đúng bằng lượng dầu ở can xăng.

21 BÁC LOAN, BÉ HẰNG VÀ BÀ HẠNH

Gọi tuổi của bác Loan là X và tuổi của bé Hằng là Y. Theo giả thuyết bài toán, bà Hạnh X + Y tuổi khi bác Loan Y tuổi. Suy ra bà Hạnh hơn bác Loan X tuổi. Vậy khi bà Hạnh bằng tuổi bác Loan bây giờ thì bác Loan vừa mới sinh. Còn bây giờ bà Hạnh gấp đôi tuổi bác Loan.

22 TUỔI BA CHÀNG TRAI

Gọi X là số tuổi của Trung hơn Nghĩa..

Theo điều kiện bài toán ra ta có:

Tuổi Trung + X = 2(tuổi Tùng + X)

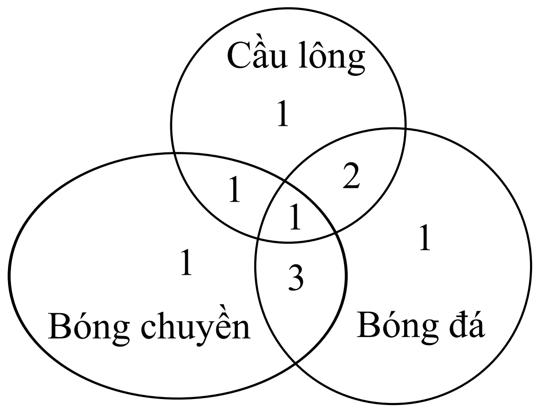
Suy ra, tuổi Trung = 2 (tuổi Tùng) + X

Mặt khác: Tuổi Trung = Tuổi Nghĩa + X

Từ đó suy ra: Trung là người nhiều tuổi nhất, Tùng là người ít tuổi nhất.

23 CÓ BAO NHIÊU CHÀNG TRAI?

Ta vẽ ba vòng tròn giao nhau, mỗi vòng tròn biểu thị một nhóm sở thích: bóng đá, bóng chuyền, cầu lông.



Hình 6:

Có 1 em tham gia cả 3 nhóm, ta điền 1 vào phần chung của cả 3 vòng tròn. Có 2 em vừa bóng chuyền và cầu lông, nhưng đã có 1 em tham gia cả 3 nhóm, vậy chỉ có 1 em tham gia đúng 2 nhóm sở thích vừa nêu. Ta điền 1 vào phần chung của 2 vòng này ở phần không chung với vòng tròn đá bóng.

Lập luận tương tự ta có: 3 em tham gia đúng 2 sở thích bóng đá và bóng chuyền, 2 em tham gia đúng 2 sở thích bóng đá và cầu lông, 1 em chỉ tham gia bóng đá, 1 em chỉ tham gia bóng chuyền 1 em chỉ tham gia cầu lông. Ta điền các số này vào các phần tương ứng (như hình vẽ). Từ đó dễ dàng xác định được số chàng trai của lớp là 10.

24 BA MÔN THỂ THAO

Số học sinh của lớp là 25, trong lớp có 6 em xếp loại yếu- kém về môn toán, những học sinh tham gia thể thao đều đạt trung bình hoặc khá về môn toán, vậy số học sinh tham gia tập thể thao nhiều nhất là 19.

Không có ai tập cả 3 môn: suy ra số lượt tham gia tối đa là 38. Theo bài số lượt tham gia thể thao là

17 (xe đạp) + 13 (bơi) + 8 (bóng bàn) = 38 (lượt)

Vậy chỉ có thể: 19 đều tham gia thể thao, mỗi em tham gia đúng 2 nhóm sở thích. Từ đó dễ dàng trả lời các câu hỏi của bài toán:

- Không có học sinh đạt loại giỏi về xếp loại môn toán

- Trong số 19 em tham gia tập thể thao, những em vừa tập bơi, vừa tập bóng bàn thì không tập đua xe đạp, có 17 em tập đua xe đạp, vậy chỉ có 2 em vừa tập bơi vừa tập bóng bàn.

25 HỘI ĐỌC BÁO

Gọi số thành viên của hội là n, số tạp chí họ đặt là m.

Số các nhóm 2 tạp chí khác nhau có thể thành lập từ m tạp chí là: $\frac{m(m-1)}{2}$

Theo bài ta có: $2n = 3m$ và $\frac{m(m-1)}{2} = n$ (*)

Ta cần xác định số tự nhiên n, m thoả mãn (*), hay thoả mãn: $2n = 3m; m(m-1) = 2n$.

Suy ra: $3m = m(m-1)$.

Giải ra ta được: $m = 4$ suy ra $n = 6$.

Vậy số thành viên của hội là 6 và số tạp chí họ đặt là 4.

26 NHÃN HIỆU NÓI DỐI

Ta hãy rút một bóng từ ngăn có nhãn hiệu Trắng - Đỏ.

Có 2 khả năng:

- Bóng rút ra màu đỏ: Vì nhãn sai với bóng trong ngăn, nên trong ngăn chỉ có thể là 2 bóng đỏ. Ngăn có nhãn Trắng-Trắng chỉ có thể chứa 1 bóng đỏ 1 bóng trắng, suy ra ngăn có nhãn Đỏ-Đỏ chứa 2 bóng trắng.

- Bóng rút ra màu trắng: Trong ngăn này có chứa bóng màu trắng, mà bóng bên trong sai với nhãn bên ngoài là Trắng-Đỏ, nên chỉ có thể chứa 2 bóng trắng. Ngăn có nhãn Đỏ-Đỏ chỉ có thể chứa 1 bóng trắng 1 bóng đỏ, suy ra ngăn có nhãn trắng-trắng chứa 2 bóng đỏ.

Vậy bằng cách rút như trên ta hoàn toàn xác định được các bóng chứa trong mỗi ngăn.

27 CHỈ MỘT LẦN CÂN

Ta đánh số các ví từ 1 đến 10.

Lấy ra từ ví số 1 một đồng, từ ví 2 hai đồng... từ ví 9 chín đồng, ví 10 không lấy đồng nào cả. Đem cân gập cả 45 đồng tiền đã lấy ra.

- Nếu cân được đúng 450 gam thì ví 10 đựng các đồng tiền giả.

- Nếu cân được 450 gam cộng một số lẻ gam thì số gam lẻ ở đó chính là số thứ tự của ví đựng tiền giả mà ta cần xác định.

28 TÌM ĐỒNG TIỀN GIẢ

Đặt mỗi đĩa cân 9 đồng tiền, nếu cân thăng bằng thì đồng tiền giả nằm trong số 9 đồng tiền còn lại. Nếu cân không thăng bằng thì đồng tiền giả nằm trong số 9 đồng bên nhẹ hơn.

- Đặt mỗi đĩa cân 3 đồng lấy từ 9 đồng chứa tiền giả. Xem xét như trên ta xác định được 3 đồng trong đó có đồng tiền giả.

- Đặt mỗi bên cân 1 đồng lấy từ 3 đồng có chứa tiền giả. Nếu cân thăng bằng thì đồng tiền giả là đồng còn lại. Nếu cân không thăng bằng thì đồng tiền giả là đồng nhẹ hơn.

29 BẰNG BA LẦN CÂN

Câu (A): Ta đánh số các đồng tiền từ 1 đến 8. Cân lần 1: Một bên đĩa đặt đồng 1 và đồng 2, bên đĩa kia đặt đồng 3 và đồng 4. Ta có 2 khả năng sau:

1. Cân không thăng bằng: Đồng tiền giả nằm trong 4 đồng đang cân.

Cân lần 2: Một bên cân để đồng 1 và 2, bên kia để đồng 5 và 6 (tiền thật). Có 2 khả năng:

- Cân thăng bằng: đồng tiền giả là 3 hoặc 4 (a).

- Cân không thăng bằng: đồng tiền giả là 1 hoặc 2 (b).

Sau lần cân này ta đã biết đồng tiền giả nặng hay nhẹ.

Cân lần 3: Một bên để đồng 3 hoặc 4 (đồng 1 hoặc 2 đối với trường hợp (b), còn bên kia để đồng tiền thật. Cân thăng bằng hay không thăng bằng ta đều xác định được đồng tiền giả và biết nó nặng hay nhẹ hơn đồng tiền thật.

2. Cân thăng bằng: Đồng tiền giả nằm trong 4 đồng tiền ngoài (đồng 5, 6, 7 và 8).

Cân lần 2: Một bên để các đồng 1, 2 và 3 (tiền thật), bên kia để các đồng 5, 6 và 7. Có hai khả năng:

- Cân thăng bằng: đồng tiền giả là đồng 8. Cân lần 3 so sánh đồng 8 với một đồng tiền thật, ta xác định được đồng tiền giả nặng hơn hay nhẹ hơn đồng tiền thật.

- Cân không thăng bằng: đồng tiền giả nằm trong các đồng 5, 6 và 7. Ta cũng biết đồng tiền giả nặng hơn hay nhẹ hơn đồng tiền thật.

Cân lần 3: một bên để đồng 5, bên kia để đồng 6. Cân thăng bằng hay không thăng bằng ta đều xác định được đồng tiền giả.

Câu (B): Ta chia 12 đồng tiền thành 3 nhóm, mỗi nhóm 4 đồng.

Cân lần 1: Mỗi bên cân để một nhóm. Có 2 khả năng:

- Cân thăng bằng: đồng tiền giả nằm trong nhóm thứ ba (bốn đồng nằm ngoài). Ta đánh số bốn đồng tiền này và cân tiếp 2 lần sau như trường hợp "II. Cân thăng bằng" của câu A):

- Cân không thăng bằng: đánh số bên nặng là các đồng 1, 2, 3 và 4, còn bên nhẹ là các đồng 5, 6, 7 và 8. Ta cân tiếp cho riêng trường hợp này như sau:

Cân lần 2: Một bên để đồng 1, 2 và 5, bên kia để đồng 3, 4 và 6. Có 2 khả năng.

a) Cân thăng bằng: đồng tiền giả là đồng 7 hoặc 8 và nhẹ hơn đồng tiền thật. Cân lần 3: một bên để đồng 7, bên kia để đồng 8, đồng nhẹ hơn là đồng giả.

b) Cân không thăng bằng: Ta xét 2 trường hợp như sau:

- Bên các đồng 1, 2 và 5 nặng hơn:

+ Đồng tiền giả nặng hơn là đồng 1 hoặc 2.

+ Đồng tiền giả nhẹ hơn, là đồng 6.

Cân lần 3: Để đồng 1 một bên, đồng 2 bên kia. Cân thăng bằng thì đồng tiền giả là đồng 6 và nhẹ hơn đồng thật. Cân không thăng bằng thì đồng nặng hơn là đồng giả.

+ Bên đồng 1, 2 và 5 nhẹ hơn: thực hiện như trường hợp nặng hơn.

30 TÌM PHẾ PHẨM

Cân lần 1: Để bên trái sản phẩm mẫu và 1 trong 5 sản phẩm đang xét. Để bên phải 2 trong 4 sản phẩm còn lại. Có 3 khả năng: cân thăng bằng, bên phải nặng hơn và bên phải nhẹ hơn.

Cân lần 2: Xét riêng từng trường hợp.

a. Bên phải nặng hơn: Lấy 2 sản phẩm ở bên phải để mỗi sản phẩm vào một bên cân.

- Nếu thăng bằng thì phế phẩm ở bên trái trong lần cân 1 cùng với sản phẩm mẫu và nhẹ hơn sản phẩm thật.

- Nếu cân không thăng bằng thì sản phẩm nào nặng hơn là phế phẩm.

b. Bên phải nhẹ hơn: Thực hiện tương tự như trên.

c. Cân thăng bằng: Phế phẩm là 1 trong 2 sản phẩm bên ngoài. Lấy 1 trong 2 sản phẩm đó để một bên cân, bên kia để sản phẩm mẫu. Cân thăng bằng thì phế phẩm là sản phẩm còn bên ngoài (ta không xác định được nó nặng hay nhẹ hơn sản phẩm mẫu). Cân không thăng bằng thì phế phẩm là sản phẩm đang cân.

31 CẦN BAO NHIÊU QUẢ CÂN?

Hiển nhiên cần quả cân 1kg để cân vật 1kg.

Để cân vật 2kg có thể dùng 1 quả cân 2kg hoặc 2 quả cân 1kg. Nhưng với quả cân 1kg đã có, thêm quả cân 2kg ta còn cân được vật nặng 3kg. Vậy quả cân thứ nhất q1=1kg, quả cân thứ 2 q2 = 2kg.

Tiếp theo là quả cân 4kg, cùng với 2 quả cân kia sẽ cân được các vật từ 1kg đến 7kg. Vậy q3 = 4kg.

Lập luận tương tự, ta thấy cần có: q4 = 8kg ,. . . , q7 = 64kg thì với 7 quả cân đó ta sẽ cân được các vật có trọng lượng nguyên từ 1kg đến 100kg. Vậy cần ít nhất 7 quả cân với trọng lượng tương ứng là: $qk = 2^{k-1}$ kg,k = l, 2,... 7.

32 GIẤC MƠ CỦA NGƯỜI BÁN HÀNG

Có nhiều cách cân để được đúng 1kg chè.

Cách 1: Dùng chiếc khuy cài cân liên tiếp 2 lần ta được 1.300 gam chè. Dùng 300 gam nước cân được 300 gam chè lấy ra từ 1.300 gam chè vừa có, còn lại đúng 1kg chè (không kể giấy gói).

Cách 2: Dùng 300 gam nước cân được 300 gam chè. Sau đó, bên đựng nước thay bằng chiếc khuy cài. Bên đĩa cân đựng chè đã có 300 gam chè, giờ cho thêm (nhưng để tách ra) để cân thăng bằng, ta được lượng chè 350 gam. Dùng chiếc khuy cài cân thêm 650 gam chè nữa sẽ được đúng 1kg chè (không kể giấy gói).

33 CÁC VẬT ĐỰNG GÌ?

Chiếc chén được chuyển vào giữa 2 vật đựng chè và đựng sữa, vậy vật đựng chè và vật đựng sữa chỉ có thể là chai và vại to hoặc vại to và cốc. Ta xét 2 khả năng đó:

a. Chén được chuyển vào giữa chai và vại to: Ta thấy ngay vại to chỉ có thể đựng chè hoặc sữa. Nhưng thứ tự vại to trở nên ở giữa, nên nó đựng cà phê. Vậy khả năng này không thoả mãn. Suy ra chỉ là khả năng kia.

b. Chén được chuyển vào giữa vại to và cốc; vị trí của chén trở thành ở giữa. Vậy chén đựng cà phê. Vật đựng chè là vại to hoặc cốc, và thứ tự của nó thay đổi sau khi chuyển chén, vậy vật đựng chè chỉ có thể là cốc, suy ra vại to đựng sữa, suy tiếp vại thấp đựng ca cao, còn lại chai đựng bia.

34 TRÒ CHƠI BỐC DIÊM (I)

Để người đi sau thắng thì người đi đầu phải bốc que diêm cuối cùng, nghĩa là người đi sau khi bốc lần cuối cần để lại đúng một que diêm.

Cách chơi luôn đảm bảo cho người đi sau thắng là: khi người đi trước bốc k que (k từ 1 tới 4 ở mỗi lần đi) thì người đi sau bốc (5 - k) que.

Mỗi lượt đi của người đi trước và người đi sau kế tiếp bốc đúng 5 que. Sau lần bốc thứ 5 của người đi sau số diêm còn lại đúng một que và đến lượt người đi trước bốc nên anh ta thua cuộc.

35 TRÒ CHƠI BỐC DIÊM (II)

Ký hiệu người đi trước là A, người đi sau là B.

A thắng cuộc, nghĩa là sau khi bốc xong, số que diêm của A là chẵn, thì phải: hoặc là A bốc nốt số diêm cuối cùng và được số chẵn que, hoặc là A bốc được một số chẵn que và còn lại đúng 1que.

A đi theo nguyên tắc sau đây sẽ luôn thắng cuộc.

I. Nếu B đã bốc được số lẻ que và đến lượt A thì A cần bốc sao cho còn lại 6k que, tức là: 24, 18, 12, 6 hoặc (6k -1) que, tức là: 23, 17, 11, 5.

II. Nếu B đã bốc được số chẵn que và đến lượt A thì A cần bốc sao cho còn lại (6k + 1) que (tức là: 19, 13, 7).

Để lại số que 6k, 6k - 1, 6k + 1 trong bất kỳ trường hợp tương ứng nào cũng đều thực hiện được (bạn hãy tự chứng minh).

Giờ ta xét cụ thể bước đi cuối cùng ở mỗi trường hợp I và II:

1) B đã bốc được số lẻ que và đến lượt A. Sau khi A bốc còn lại 5 (hay 6) que thì diễn biến tiếp theo là (trong ngoặc đối với trường hợp 6 que):

- B bốc 1 que thì A bốc 3 (hay 4) que, còn lại 1 que cho B.
- B bốc 3 que thì A bốc 1 (hay 2) que còn lại 1 que cho B.
- B bốc 2 hay 4 que thì A bốc hết số còn lại.

Ta nhận thấy buộc B phải bốc thêm số chẵn que và thua cuộc.

2) A bốc xong còn lại 7 que và B đã bốc được số chẵn que. Diễn biến tiếp theo là:

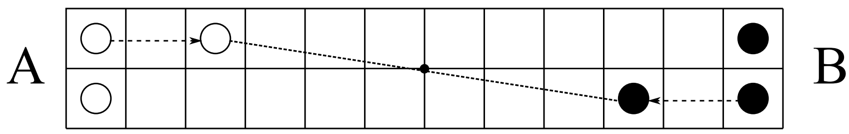
- B bốc 1 que thì A bốc 1 que, trở về trường hợp trên.
- B bốc 2 que thì A bốc 4 que, B phải bốc que cuối cùng.
- B bốc 3 que thì A bốc hết 4 que còn lại.

- B bốc 4 que thì A bốc 2 que, B phải bốc que cuối cùng.

Ta thấy B đều phải bốc thêm số lẻ que và thua cuộc.

36 TRÒ CHƠI TIẾN QUÂN

Ký hiệu người đi trước là A, đi sau là B. B thắng cuộc nghĩa là tới bước đó B đi xong thì A không còn ô đi nữa.



Hình 7:

Để đảm bảo luôn luôn thắng cuộc B cần đi theo nguyên tắc sau: Sau mỗi lần đi B luôn tạo ra cho 4 quân cờ ở vị trí đối xứng nhau qua tâm bàn cờ, hay 4 quân cờ tạo thành hình bình hành mà giao điểm hai đường chéo là tâm bàn cờ.

Thật vậy: Trên một đường A còn đi được thì trên đường kia B cũng còn đi được (đi đối xứng). Khi A đi chạm quân của B trên đường này thì quân của B đi chạm quân A trên đường kia, đến lượt A thì không còn ô để đi nữa nên thua cuộc.

37 NGỰA TRÊN BÀN CỜ

Để ngựa từ ô góc dưới bên trái tới ô góc trên bên phải và đi qua mọi ô trên bàn cờ, mỗi ô đúng 1 lần thì ngựa phải đi đúng 63 bước.

Ở mỗi bước đi ngựa đều chuyển sang ô khác màu (ô đen sang ô trắng và ngược lại). Như vậy, sau 63 bước đi, ngựa chuyển sang ô khác màu với ô đầu tiên. Nhưng ô góc dưới bên trái và ô góc trên bên phải là cùng màu (cùng trên đường chéo bàn cờ). Vậy ngựa không thể đi được theo điều kiện bài ra.

38 CHUYỂN QUÂN TRÊN BÀN CỜ

Trường hợp ít thuận lợi nhất là cả 50 quân cờ đã đánh số đều nằm vào 50 ô đánh số, nhưng không quân nào nằm đúng ô tương ứng.

Ta xét quân cờ Qm đang ở ô k và quân Qk đang ở ô n: Ta chuyển Qm tới một ô trống (bàn cờ còn 14 ô trống), chuyển quân Qk tới ô k, rồi chuyển quân Qn tới ô n. Như vậy sau 3 lần chuyển ta đưa được 2 quân cờ về đúng ô tương ứng (chuyển những quân sau sẽ thuận lợi hơn, chẳng hạn chuyển quân cờ về đúng ô mà Qn vừa chiếm chỗ chỉ cần 1 lần chuyển,...)

Vậy để đưa 50 quân cờ về đúng các ô tương ứng, số lần chuyển tối đa là 75.

39 TRÒ CHƠI SẮP XẾP LẠI QUÂN CỜ

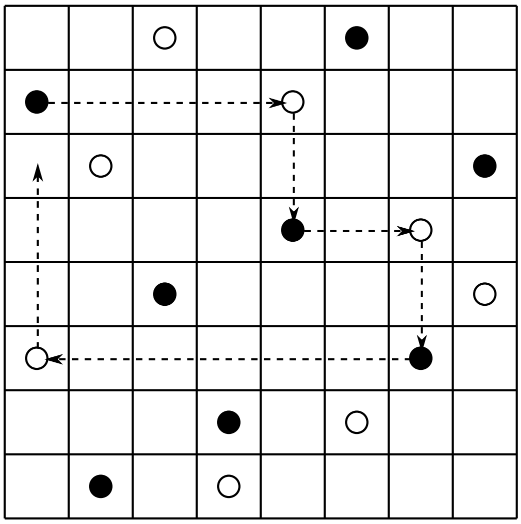
Có thể giải bài toán theo nhiều cách, chẳng hạn theo cách sau:

Vị trí cũ:	□	■	□	■	□	■	□	■		
Chuyển lần 1:	□			■	□	■	□	■	■	□
Chuyển lần 2:	□	□	■	■			□	■	■	□
Chuyển lần 3:	□	□	■	■	■	■	□			□
Chuyển lần 4:			■	■	■	■	□	□	□	□

40 SẮP QUÂN TRÊN BÀN CỜ

Ta xuất phát từ 1 ô đánh dấu tới ô đánh dấu cùng hàng, tiếp theo tới ô đánh dấu cùng cột, tiếp theo lại tới ô đánh dấu cùng hàng... nghĩa là thay đổi liên tục hướng đi theo hàng và cột tới các ô đã đánh dấu. Ta dừng lại khi tới ô đầu tiên thuộc đường gấp khúc ta đang đi. Gọi ô đó là M.

- Ta chứng minh ô M chỉ có thể là ô xuất phát của đường gấp khúc đang đi. Giả sử M không phải là ô xuất phát. Dĩ nhiên ô M có 1 ô đánh dấu cùng hàng, gọi đó là A, một ô đánh dấu cùng cột, gọi đó là B. Do M không là ô xuất phát nên A và B cũng thuộc đường gấp khúc đang xét. Để



Hình 8:

tới M không có cách nào khác là phải từ A hoặc từ B. Do vậy M không thể là ô ta gặp đầu tiên của đường gấp khúc đang xét. Mâu thuẫn với giả thiết về M đã đặt ra ở trên. Vậy M là ô xuất phát.

- Đường gấp khúc kín này gồm một số chẵn đoạn thẳng (dọc, ngang xen kẽ) nên gồm một số chẵn ô đánh dấu, 2 ô liên tiếp là trên cùng một dòng hay cùng một cột. Đánh số 1 từ ô xuất phát, cứ ô lẻ đặt quân cờ đen, ô chẵn đặt quân cờ trắng thì đường gấp khúc kín này thoả mãn: mỗi dòng, mỗi cột có đúng 1 quân cờ trắng 1 quân cờ đen.

- Nếu đường đi chưa hết các ô đánh dấu, ta bắt đầu lại từ 1 ô nào đó chưa đặt quân cờ và đi 1 đường gấp khúc kín như trên, rồi lại đặt các quân cờ trắng, đen theo cách trên. Cứ như vậy ta được một số hữu hạn đường gấp khúc kín đi hết 16 ô đánh dấu thoả mãn điều kiện bài toán: mỗi dòng, mỗi cột có đúng 1 quân cờ trắng, 1 quân cờ đen.

- Hai đường gấp khúc này không thể có chung 1 ô đánh dấu, vì bắt đầu từ ô đó suy ra 2 đường gấp khúc là trùng nhau.

41 TRÒ CHƠI "THÁP HÀ NỘI"

Muốn chuyển cả 5 khoanh sang cọc B thì trước hết phải chuyển 4 khoanh ở trên sang cọc C (theo nguyên tắc trên bé dưới to) sau đó chuyển khoanh dưới cùng (khoanh to nhất) sang cọc B. Để hoàn tất công việc ta lại phải chuyển 4 khoanh từ cọc C sang cọc B với A là cọc phụ.

Vậy nếu gọi U_5 là số lượt tối thiểu để chuyển xong 5 khoanh, U_i là số lượt tối thiểu để chuyển xong i khoanh ($i = 1, 2, 3, 4$) thì theo nhận xét ta có:

$$U_5 = 2U_4 + 1$$
$$U_4 = 2U_3 + 1$$
$$U_3 = 2U_2 + 1$$
$$U_2 = 2U_1 + 1$$
$$U_1 = 1$$

Từ đó ta tính được $U_5 = 31$

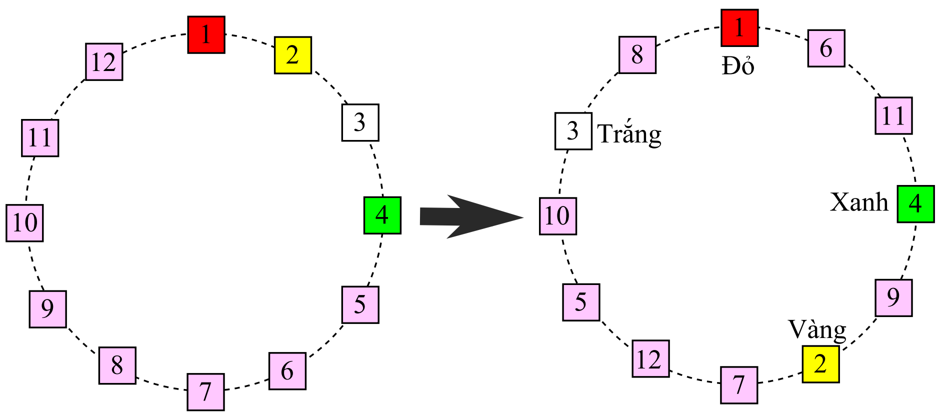
Suy rộng tới trường hợp n khoanh, ta có:

$U_1 = 1, U_k = 2U_{k-1} + 1$ với $2 \leq k \leq n$

Và kết quả là: $U_n = 2^n - 1$.

42 CÁC NGÔI SAO TRÊN VÒNG TRÒN

Ta bố trí các ô trên vòng tròn theo cách: 2 ô cạnh nhau là 2 ô mà ngôi sao có thể chuyển qua lại theo quy tắc bài toán (bỏ qua 4 ô giữa chúng). Cụ thể như trên hình 9.



Hình 9:

Ban đầu các ngôi sao theo thứ tự Đỏ, Vàng, Trắng, Xanh ở các ô tương ứng là 1, 2, 3, 4. Ta nhận thấy: Các ngôi sao khi dịch chuyển chỉ có thể theo cùng một hướng (ngược hay cùng chiều kim đồng hồ) nếu không ngôi sao này sẽ chặn đường các ngôi sao khác. Vậy có các khả năng sau:

- Đỏ tới ô 4, Xanh tới ô 2, Vàng tới ô 3, Trắng tới ô 1 và thứ tự mới của chúng là : Trắng, Xanh, Vàng, đỏ.

- Đỏ tới ô 2, Xanh tới ô 3, Vàng tới ô 1, Trắng tới ô 4 và thứ tự mới của chúng là: Vàng, Đỏ, Xanh, Trắng.

- Đỏ tới ô 3, Trắng tới ô 2, Vàng tới ô 4, Xanh tới ô 1 và thứ tự mới của chúng là: Xanh, Trắng, Đỏ, Vàng.

Vậy các ngôi sao khi chuyển dịch theo quy tắc bài toán có 3 khả năng sắp xếp lại thứ tự như trên.

43 MỘT CUỘC KÉO CO

Kết quả bài toán: Xếp theo thứ tự từ khoẻ đến yếu là: Việt, Ba, An, Nam.

Thật vậy: Ta biểu diễn hình thức sức của An, Ba, Nam, Việt tương ứng là a, b, n, v. Từ các điều kiện bài toán ta có:

$$b > a, b > n(4)$$

$$a + b = v + n(5)$$

$$a + v > b + n(6)$$

Từ (5) và (6) suy ra: $a > n$ và $v > b$. Kết hợp với (4) suy ra kết quả như ở trên.

44 CÁC VẬN ĐỘNG VIÊN THỂ THAO

Ký hiệu A_j là giải của vận động viên mang áo số j (j là 1, 2, 3 hoặc 4 và A_j cũng vậy).

Khi đó điều kiện bài toán có thể viết như sau:

$$A_3 \neq 1$$
$$A_2 = k, A_k = h, A_h = 4.$$

Ta nhận thấy: k không thể là 2 (vì $A_2 \neq 2$) và không thể là 4 (vì $A_h = 4$ rồi), tương tự h cũng không thể là 4, không thể là 2. Vậy k và h đều chỉ có thể là 1 hoặc 3, nên có 2 khả năng sau:

- $k = 3, h = 1$. Khi đó $A_2 = 3, A_3 = 1, A_1 = 4$. Trường hợp này không thoả mãn vì giả thiết bài ra $A_3 \neq l$.

- $k - 1, h = 3$. Khi đó $A_2 = 1, A_1 = 3, A_3 = 4$, còn lại $A_4 = 2$. Thoả mãn điều kiện đặt ra.

Vậy ta có kết quả: vận động viên số 2 giải nhất, vận động viên số 4 giải nhì, vận động viên số 1 giải 3 và vận động viên số 3 giải 4.

45 MỖI NGƯỜI THẮNG MẤY VÁN?

Hai người chơi 10 ván, số ván thắng của B ít hơn của A, vậy số ván thắng của B nhiều nhất là 4.

Ta lại thấy số ván thắng của B không thể ít hơn 4, vì nếu số ván thắng tối đa là 3 thì số điểm tối đa của B chỉ là 6, ít hơn nửa tổng số điểm của 2 người (13 điểm), trái với giả thiết là B thắng.

Vậy B thắng 4 ván và A thắng 6 ván.

46 BA CẶP CƯỚI CHUNG

Qua các số liệu bài toán ta thấy:

- Tuấn và Hoa không thể vào một cặp vì Hoa là em gái Tuấn.

- Tuấn hơn tuổi Minh và Vân là cô gái nhiều tuổi nhất, suy ra Tuấn và Vân không thể vào một cặp, vì nếu vào một cặp thì tổng số tuổi của 2 người trong cặp này sẽ nhiều hơn tổng số tuổi của 2 người trong cặp của Minh.

- Vậy Tuấn và Hạnh và một cặp.

Ta còn có:

Tuổi Minh + Tuổi Hạnh = Tuổi Phương + Tuổi Hoa.

Hạnh đã được loại ra ở trên. Nếu Vân vào cặp với Minh thì Phương với Hoa vào một cặp. Vân nhiều tuổi nhất trong 3 cô gái. Từ đẳng thức trên suy ra: Tổng số tuổi của 2 người cặp Minh và Vân sẽ nhiều hơn tổng số tuổi của 2 người cặp Phương và Hoa, không thoả mãn điều kiện bài toán.

Vậy 2 cặp kia là: Minh và Hoa, Phương và Vân.

47 CÓ BAO NHIÊU GIA ĐÌNH

Gọi số gia đình là $n(n \geq 2)$, thì số người lớn (bố, mẹ) là $2n$. Theo điều kiện bài toán ta có:

Tổng số con $> 2n >$ số con trai $>$ số con gái $> n$ (1)

- Từ (1) suy ra số con trai tối đa là $2n-1$, số con gái tối đa là $2n-2$. Vậy số trẻ con tối đa là $4n-3$.

- Cũng từ (1) suy tương tự ta được số trẻ con tối thiểu là: $2n+3$. Kết hợp với trên ta có n phải thoả mãn:

$$4n - 3 > 2n + 3 \text{hay} n \geq 3(2)$$

- Mặt khác có một gia đình có số con lớn hơn tổng số con của $n-1$ gia đình còn lại. Gia đình nào cũng có con và số con của các gia đình đều khác nhau. Vậy tổng số con của $n-1$ gia đình kế sau tối thiểu là $1+2+...+(n-1) = n(n-1)/2$, suy ra số con của gia đình đông con nhất tối thiểu là: $n(n-1)/2+1$.

Từ đó ta có tổng số con tối thiểu là: $n(n-1)+1$

Vậy n cần thoả mãn: $4n-3 \geq n(n-1)+1$

Biến đổi ta được: $(4-n)(n-1) \geq 0$, hay $4 \geq n \geq 1$.

Kết hợp với (2) suy ra: $4 \geq n \geq 3(3)$

- Ta có mỗi gia đình đều có con trai và tối đa 2 con gái. Vậy số con trai của gia đình đông con nhất tối thiểu là:

$$n(n-1)/2 + 1 - 2 = n(n-1)/2 - 1.$$

Từ đó suy ra tổng số con trai tối thiểu là:

$$n(n-1)/2 - 1 + (n-1) = (n^2 + n - 4)/2.$$

Và n phải thoả mãn: $2n - 1 \geq (n^2 + n - 4)/2$.

Hay: $-n^2 + 3n + 2 = 0(4)$.

Kết hợp (3) và (4) ta được: chỉ có $n = 3$ thoả mãn. Vậy số gia đình trong toà nhà là 3.

- Từ (1) ta có: 6 > số con trai > số con gái > 3. Vậy số con trai là 5, số con gái là 4, số con cả thảy là 9. Vì gia đình nào cũng có con và số con của các gia đình đều khác nhau, suy ra số con của gia đình đông con nhất chỉ có thể là 6 hoặc 5. Ta xét từng khả năng đó:

- Gia đình đông con nhất có số con là 6: Khi đó hai gia đình kia, mỗi gia đình có 1 con, một gia đình có 2 con và số con gái của cả 3 gia đình tối đa mới là 3. Trường hợp này không thoả mãn.

- Gia đình đông con nhất có số con là 5: Ta có ngay kết quả: một gia đình có 1 con và là con trai, gia đình có 3 con trong đó là 1 con trai và 2 con gái, gia đình đông con nhất có 5 con thì 3 con trai và 2 con gái, thoả mãn tất cả các điều kiện của bài ra.

48 BÁO CÁO THIẾU SỰ THẬT

Vì mỗi gia đình đều có con, mỗi con trai đều có 1 chị gái hay em gái. Vậy tất cả các gia đình đều có con gái.

Suy ra số con gái ít ra bằng số gia đình.

Mặt khác, số con trai nhiều hơn số con gái. Vậy tổng số con nhiều hơn 2 lần số gia đình, hay nhiều hơn số bố mẹ. Điều này cho ta thấy mâu thuẫn trong báo cáo của anh thợ ở câu đầu tiên "bố mẹ nhiều hơn con cái’" với các câu tiếp theo.

49 BA CHÀNG CÂU CÁ

Ta xét quá trình trao đổi cá theo trình tự ngược lại: - Sau lần 3: An - 8 con; Phương - 8 con; Minh - 8 con

- Sau lần 2: An - 4 con; Phương - 4 con; Minh - 16 con

- Sau lần 1: An - 2 con; Phương - 14 con; Minh - 8 con

- Trước lần 1: An 13 con; Phương 7 - con; Minh - 4 con

Vậy An câu được 13 con cá, Phương câu được 7 con và Minh chỉ câu được 4 con.

50 BỐN CHÀNG CÂU CÁ

Theo các điều kiện bài toán ta có:

điểm Thu + điểm Bắc - điểm Xuân + điểm Nam = 9 (điểm)

- Điểm của 4 người đều khác nhau và điểm Thu nhỏ nhất, nhưng Thu lại bắt được số cá nhiều nhất. Vậy điểm của Thu tối thiểu là 2 và tối đa là 3.

- Thu bắt được nhiều cá nhất thì ít ra phải là 3 con, vì nếu chỉ là 2 con thì 3 người kia mỗi người được 1 con, tổng cộng là 5 con, trong đó con Măng và 3 con Vược là 11 điểm, còn 1 con nữa 8 điểm, điều đó không thể có.

- Số cá của Thu tối thiểu là 3 con, số điểm tối đa là 3 điểm, bắt cá chích được ít điểm nhất: 1 con được 1 điểm. Vậy chỉ có thể: Thu bắt được 3 con Chích và được 3 điểm.

- Từ đó suy ra ngay: Bắc được 6 điểm, Xuân và Nam người được 4 điểm người được 5 điểm. Vì Xuân bắt được con Măng, đã 5 điểm. Vậy Xuân được đúng 5 điểm và Nam 4 điểm.

- Cả nhóm bắt được 3 con Vược (tổng số 6 điểm), nhưng Thu và Xuân chỉ bắt được cá Chích và cá Măng, nên cá Vược do Bắc và Nam bắt, Bắc được 6 điểm, Nam được 4 điểm, mỗi người bắt được tối đa 2 con, vậy chỉ có thể: Bắc được 1 con Điêu (4 điểm) và 1 con Vược (2 điểm), còn Nam được 2 con Vược.

51 XẾP THỨ TỰ THEO SỐ CÁ CÂU ĐƯỢC

Ký hiệu số cá câu được của Văn, Phong, Cường, Tuấn tương ứng là: v, p, c, t. Từ các điều kiện bài toán ta có:

$$t > c(1)$$

$$p + v = c + t(2)$$

$$p + t < v + c(3)$$

- Từ (1) và (3) suy ra: $v > p$,

- Từ (2) và (3) suy ra: $c > p$ và $v > t$.

Vậy $v > t > c > p$, hay thứ tự theo số cá câu được từ nhiều đến ít là: Văn, Tuấn, Cường, Phong.

52 VẬN TỐC DÒNG NƯỚC

Nếu vận tốc dòng nước bằng 0 (nước đứng im) thì cây bèo đứng nguyên cạnh mố cầu, còn người bơi 20 phút được quãng đường S = (vận tốc bơi của người) × (20 phút). Vậy sau 20 phút khoảng cách giữa người và cây bèo là S.

Nhưng dòng nước chảy nên cây bèo trôi theo vận tốc dòng nước, và người - ngoài quãng đường bơi được - cũng bị trôi đúng như cây bèo. Do vậy, sau 20 phút khoảng cách giữa người và cây bèo cũng là S. Để khắc phục khoảng cách đó, khi bơi theo hướng ngược lại (xuôi theo dòng nước) người bơi lại cần thời gian cũng là 20 phút. Vậy thời gian từ lúc xuất phát tới lúc gặp lại cây bèo là 40 phút. Thời gian này cây bèo trôi được 4km. Vậy vận tốc dòng nước là 6km/h.

53 AI ĐÚNG AI SAI?

Cả 2 chiến sỹ Hiếu và Nghĩa đều sai.

Thật vậy:

- Ta ký hiệu vận tốc thuyền máy lúc im lặng là v, vận tốc dòng nước hôm chảy chậm là a, hôm chảy nhanh là $b, (a < b)$. Gọi S là khoảng cách giữa A và B.

Ta có: $a < b < v$.

Thời gian đi về tương ứng của 2 hôm là:

$$t_1 = \frac{S}{v+a} + \frac{S}{v-a} = \frac{2vS}{v^2 - a^2},$$

$$t_2 = \frac{S}{v+b} + \frac{S}{v-b} = \frac{2vS}{v^2 - b^2}.$$

Do $a < b < v$ ta có ngay $t_1 < t_2$.

Vậy hôm nào nước chảy nhanh hôm đó về muộn hơn.

54 CHUYỆN "TRINH THÁM" TRÊN TÀU THỦY

Lập luận như ở bài 52 ta có thời gian từ lúc chiếc hộp rơi xuống nước tới lúc tàu quay mũi chạy xuôi dòng bằng thời gian từ lúc đó tới lúc gặp lại chiếc hộp. Thời gian đó là: 14h45'= 13h30' = 1h15'. Suy ra thời điểm chiếc hộp rơi xuống nước là hồi 12h15'.

Ta hãy xem tại thời điểm đó ba người liên quan đang làm gì và ở đâu: Cô hầu phòng từ 12h10' đến 12h20' lựa đồ trải giường trong phòng khách, người phục vụ từ 12h10' đến 12h25' vị phu nhân Smith la mắng trong phòng bà ta, vậy người phục vụ và cô hầu phòng không thể là thủ phạm. Còn phu nhân Brown, thời điểm 12h15' bà ta đang ở đâu và làm gì? Điều đó không rõ. Vậy có thể kết luận được thủ phạm chính là bà Brown.

55 ĐỒNG HỒ CHẠY NHANH

Gọi x là số phút đồng hồ của Minh chạy nhanh trong 1 ngày, suy ra đồng hồ của Tuấn chạy nhanh $x + 0.5$ phút 1 ngày.

12 giờ trưa chủ nhật Tuấn vặn đồng hồ chậm lại 3 phút, Minh vặn chậm lại 2 phút, giả sử đồng hồ của Tuấn chỉ đúng lại sau y ngày thì đồng hồ của Minh chỉ đứng lại sau (y + 1) ngày. Ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} y(x+0.5) = 3 \\ (y+1)x = 2 \end{cases}$$

Biến đổi ta được: $2x^2 + 3x - 2 = 0$ hay $(x+2)(2x-1) = 0$, ta được giá trị x dương thoả mãn là $x = 0.5$ (phút).

Vậy đồng hồ của Minh chạy nhanh 0.5 phút 1 ngày và chỉ đúng vào 12 giờ trưa thứ năm, đồng hồ của Tuấn chạy nhanh 1 phút 1 ngày và chỉ đúng vào 12 giờ trưa thứ tư.

56 LÁ SEN PHỦ KÍN MẶT HỒ

Gọi diện tích lá 1 cây sen lúc trồng là a, sau 1 ngày trở thành $2a$, ..., sau k ngày trở thành $2^k a$. Sau 8 ngày lá sen phủ kín mặt hồ. Vậy diện tích mặt hồ là $64a$. Suy ra $25/64$ diện tích mặt hồ là $25a$.

Để 6 giờ ngày 19-6 lá sen phủ kính 64 diện tích mặt hồ (hay $25a$) có thể trồng 25 cây sen vào chính thời điểm đó. Nhưng bài toán yêu cầy số cây ít nhất (số nguyên cây) để phủ kín đúng $25/64$ diện tích mặt hồ, ta tiến hành như sau:

Phân tích $25a$ thành $25a = 1a + 2^3 a + 2^4 a$

Qua phân tích này ta nhận thấy: nếu vào 6 giờ sáng các ngày 15-6, 16-6 và 19-6 mỗi ngày đều trồng một cây sen thì ở thời điểm 6 giờ sáng ngày 19-6 lá sen phủ kín đúng $25/64$ diện tích mặt hồ.

57 NHỮNG QUẢ BÓNG MÀU

a. Để chắc chắn có 3 bóng màu đỏ, ta cần lấy ra 28 bóng.

Thật vậy: trong 28 bóng lấy ra tối đa có 15 bóng xanh, 10 bóng vàng, còn lại 3 bóng chỉ có thể là đỏ. Vậy ít ra có 3 bóng đỏ.

b. Để chắc chắn có 3 bóng cùng màu, cần lấy ra 7 bóng.

Thật vậy: 7 bóng chỉ có 3 màu nên 1 màu ít ra có 3 bóng.

c. Để chắc chắn có 3 bóng khác màu nhau, cần lấy ra 36 bóng.

Thật vậy: số lượng bóng đỏ nhiều nhất là 20 bóng, sau đến bóng xanh 15 bóng. Nếu chỉ lấy tối đa 35 bóng thì có thể chưa có bóng màu vàng. Nhưng lấy 36 bóng thì ít ra sẽ có 1 bóng vàng, hay chắc chắn có ba bóng khác màu.

58 CÀ VẠT KHÁC MÀU

Cần lấy ra 38 cà vạt thì ít ra được 10 cà vạt cùng màu.

Thật vậy: Trong số cà vạt lấy ra có 9 màu đỏ, 9 màu xanh, 9 màu vàng và 10 màu nâu và đen (cả thảy 37 chiếc) thì vẫn chưa có 10 chiếc cùng màu, nhưng lấy thêm 1 cà vạt (thành 38 chiếc) thì chiếc đó sẽ là 1 trong 3 màu đỏ, xanh, vàng và thoả mãn yêu cầu bài ra.

59 CHÍN NGƯỜI CHƠI CỜ

Tại mỗi thời điểm số ván đã chơi xong của mỗi người là một số nguyên từ 0 đến 8. Nhưng khi đã có người chơi xong cả 8 ván thì mỗi người đều chơi ít ra 1 ván, và ngược lại khi còn có người chưa chơi xong ván nào thì không thể có người đã chơi xong 8 ván. Vậy số 0 và số 8 không thể đồng thời có mặt. Ta có 9 người chơi cờ, số ván đã chơi xong của mỗi người là 1 trong 8 số, suy ra ắt phải có 2 người đã chơi xong cùng một số ván.

Tại một thời điểm mà có đúng 2 người đã chơi xong cùng một số ván cờ thì 7 người kia có số ván cờ đã chơi xong là khác lẫn nhau và từ đúng 7 số nguyên từ 0 đến 8 trong số đó số 0 và 8 loại trừ nhau (chỉ có mặt đúng 1 số). Từ đó suy ra có đúng 1 người hoặc chưa chơi xong ván nào, hoặc đã chơi xong cả 8 ván.

60 SẮP XẾP CHỖ NGỒI

a. Đầu tiên để 4 người vợ ngồi xen kẽ với 4 ghế trống:

Người đầu tiên ngồi xuống ghế nào cũng được vì vai trò các ghế là như nhau. Người thứ hai ngồi xuống có 3 khả năng (3 cách). Hai người đã ngồi, người thứ ba ngồi xuống có 2 khả năng. Người thứ tư chỉ có 1 khả năng (vì chỉ còn 1 ghế). Vậy 4 người vợ ngồi xuống trước có 3. 2. 1 = 6 cách.

Đến lượt bốn người chồng ngồi xuống. Người thứ nhất có 4 cách, người thứ hai có 3 cách, người thứ ba có 2 cách và người cuối cùng không còn khả năng lựa chọn. Vậy với mỗi cách ngồi của 4 người vợ có 4. 3. 2. 1 = 42 cách ngồi của 4 người chồng. Suy ra 4 cặp vợ chồng có 6.24 = 144 cách ngồi sao cho không có 2 người vợ nào ngồi cạnh nhau.

b. Ký hiệu 4 người vợ là A, B, C, D và 4 người chồng tương ứng là a, b, c, d. Ký hiệu dấu "!" là ghế trống. Đầu tiên để 4 người vợ ngồi xuống theo phần (a) có 6 cách. Với 1 cách đã ngồi của 4 người vợ ta xét các khả năng xếp cho 4 người chồng:

- Xét trường hợp 4 người vợ ngồi theo thứ tự vòng quanh là:

A ! B ! C ! D ! (A). Với mỗi cách ngồi khác cũng xét hoàn toàn tương tự.

Ta thấy giữa A và B chỉ có thể là c hoặc d.

- Nếu là AcB thì d chỉ có thể: BdC, suy ra a chỉ có thể: CaD. Vậy cách ngồi trong trường hợp này là: AcBdCaDb (A)

- Nếu là AdB thì c chỉ có thể: DcA, suy ra b chỉ có thể: CbD. Vậy cách ngồi trong trường hợp này là: AdBaCbDc (A).

Với một cách ngồi của 4 người vợ chỉ có 2 cách ngồi của 4 người chồng thoả mãn bài toán. Vậy có $6 \times 2 = 12$ cách ngồi của 4 cặp vợ chồng sao cho không có 2 người chồng nào, không có 2 người cùng cặp nào ngồi cạnh nhau.

61 GẶP GỠ - LÀM QUEN

Ký hiệu các khách nữ là các số từ 1 đến 9. Mỗi lần mời nhà văn mời 3 khách nữ. Ta thấy mỗi nhóm 3 người đều có thể tách thành 3 nhóm 2 người (theo nghĩa làm quen) chẳng hạn: (1, 2, 3) thành (1, 2), (2, 3) và (1, 3). Nếu mời khách nữ theo nhóm 2 người thì phải mời cả thảy $\frac{9\times 8}{2} = 36$ lần để 2 khách nữ bất kỳ nào cũng có dịp làm quen với nhau. Nhưng nếu mời theo nhóm 3 người thì chỉ cần $36/3 = 12$ lần mời (3 nhóm 2 thay bằng 1 nhóm 3 người).

Ví dụ minh hoạ về mời 12 lần các nhóm a như sau:

129				
138	234			
145	256	357	468	
167	278	369	479	489 (*)

Ta thấy trong 12 lần mời các nhóm 3 khác nhau mỗi khách nữ được mời đúng 4 lần. Qua 4 lần mời đều được làm quen với 8 khách nữ khác. Vậy đối với các khách nữ chỉ cần 12 lần mời.

Để 2 người bất kỳ trong số 11 khách nam đều có dịp làm quen lẫn nhau mà mỗi lần chỉ mời 2 người thì cần cả thảy $11.10/2 = 55$ lần mời. Từ đó suy ra số lần mời ít ra là 55.

Vấn đề đặt ra với 55 lần mời (mỗi lần 2 khách nam 3 khách nữ) có đủ để bất kỳ 2 người khách nào (trong số 20 người khách) cũng có dịp gặp (làm quen) với nhau được không?

Ta chỉ còn phải xét giữa khách nữ và khách nam: Trong 55 lần mời mỗi khách nam được mời 10 lần. 10 lần đó với 10 nhóm 3 khách nữ lấy từ 12 nhóm (như ở (*)) thì mỗi khách nam đều gặp mỗi khách nữ ít ra 2 lần.

Vậy chỉ cần 55 lần mời thì mọi người khách đều có dịp làm quen lẫn nhau.

62 NHỮNG SỐ ĐIỆN THOẠI BÍ ẨN

Ký hiệu số điện thoại là ABCDE, trong đó các chữ cái A, B, C, D, E là các chữ số khác nhau.

Theo điều kiện bàn toán ta có: ABCDE + EDCBA = FFFFF,

Nghĩa là phải có: A + E = B + D = 2C = F

Mặt khác: A + B + C + D + E = 10

Suy ra: F = 4, C =2

A chỉ có thể là 3 hoặc 4, tương ứng E là 1 hoặc 0.

Ta lại có các số điện thoại nằm trong khoảng từ 20000 đến 99999. Vậy 4 số điện thoại phải tìm là: 30241, 34201 41230, 43210

63 BA CON TRAI

Đáp án: Phân tích số 36 thành tích của 3 số tự nhiên và cộng chúng lại:

- $36 = 1 \times 1 \times 36; 1 + 1 + 36 = 38$
- $36 = 1 \times 3 \times 18; 1 + 2 + 18 = 21$
- $36 = 1 \times 2 \times 12; 1 + 3 + 12 = 16$
- $36 = 1 \times 4 \times 9; 1 + 4 + 9 = 14$
- $36 = 1 \times 6 \times 6; 1 + 6 + 6 = 13(a)$
- $36 = 2 \times 2 \times 9; 2 + 2 + 9 = 13(b)$
- $36 = 2 \times 3 \times 6; 2 + 3 + 6 = 11$
- $36 = 3 \times 3 \times 4; 3 + 3 + 4 = 10$

Ta có 8 trường hợp.

Theo bài ra tuổi của 3 cậu con trai giáo sư không xác định được ngay. Vậy ngày nói chuyện đó chỉ có thể là ngày 13, hay tuổi của chúng sẽ theo (a) hoặc (b).

Ta lại có thêm điều kiện: Khi sinh cậu bé nhỏ nhất thì 2 cậu con lớn đã có rồi, nghĩa là hai cậu con nhỏ (cậu thứ hai và thứ ba) không thể là sinh đôi. Ta loại trường hợp (b). Từ (a) suy ra: hai cậu con đầu của giáo sư là sinh đôi (đều 6 tuổi), còn cậu con thứ ba 1 tuổi.

64 CÔNG VIỆC CHUNG

Ta nhận thấy số đoạn gỗ cưa được của nhóm Đặng – Vũ phải là số chia hết cho 3 suy ra nhóm đó chính là nhóm Phương - Thanh (cưa được 27 đoạn). Số đoạn gỗ cưa được của nhóm Trần - Lê là số chia hết cho 4, suy ra nhóm này chính là nhóm Tùng - Nghĩa (cưa được 28 đoạn). Vậy còn lại nhóm Nguyễn - Hoàng là nhóm Tuấn - Minh. Tổ trưởng là Nguyễn Tuấn, suy ra họ của Minh là Hoàng.

65 THANH TOÁN NỢ NẦN TRONG SINH VIÊN

Có thể thanh toán nợ nần giữa các sinh viên một cách sòng phẳng như sau:

- Gọi a_j là số tiền vay và b_j là số tiền cho vay của sinh viên $j(j = 1, 2, ..., 7)$. Ta có ngay:

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_7 = b_1 + b_2 + \cdots + b_7$$

- Nếu mỗi sinh viên j đều bỏ số tiền mà mình đã vay (a_j) vào một đống chung ($j = 1, 2, ..., 7$ rồi sau đó nhận lại số tiền mình đã cho vay (b_j) thì vấn đề được giải quyết xong.

Cũng có thể giải quyết vấn đề gọn nhẹ hơn như sau:

Ở mỗi sinh viên k xét hiệu $a_k - b_k$

Sinh viên ứng với hiệu mang dấu dương thì bỏ vào đống chung số tiền $a_k - b_k$, còn sinh viên ứng với hiệu mang dấu âm thì được nhận số tiền $b_k - a_k$ từ đống chung có trước đó.

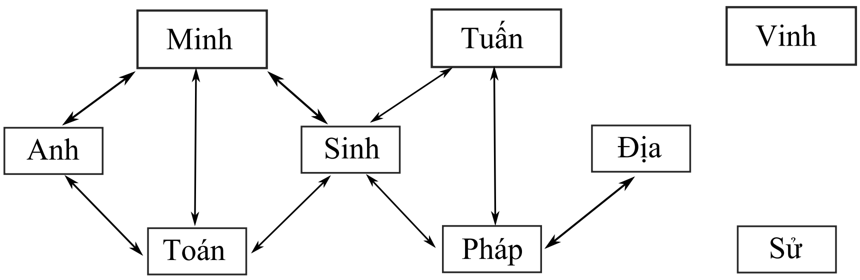
66 AI ĐƯỢC ĐIỂM MẤY?

Giả sử câu cuối "An được điểm 8" là đúng, suy ra 2 câu kia sai, nghĩa là Phương điểm 9, Minh điểm 8. Có 2 người được điểm 8, không thoả mãn điều kiện điểm của 3 người khác nhau. Vậy câu cuối sai.

- Giả sử câu giữa đúng (Minh không phải điểm 8) thì 2 câu kia sai, nghĩa là An không phải điểm 8 và Phương điểm 9, không thoả mãn vì không có ai điểm 8 cả. Vậy câu giữa cũng sai, suy ra câu đầu đúng. Từ đó ta có: Minh điểm 8, Phương điểm 9, An không điểm 8, nghĩa là: Minh điểm 8, Phương điểm 7 và An điểm 9.

67 BA THÀY GIÁO

Từ các điều kiện của bài toán có sơ đồ sau (hình 10)



Hình 10:

Trong đó ký hiệu Minh $\leftrightarrow$ Toán với nghĩa thầy Minh không dạy môn Toán, ký hiệu Toán $\leftrightarrow$ Sinh với nghĩa thầy dạy Toán khác với thầy dạy Sinh.

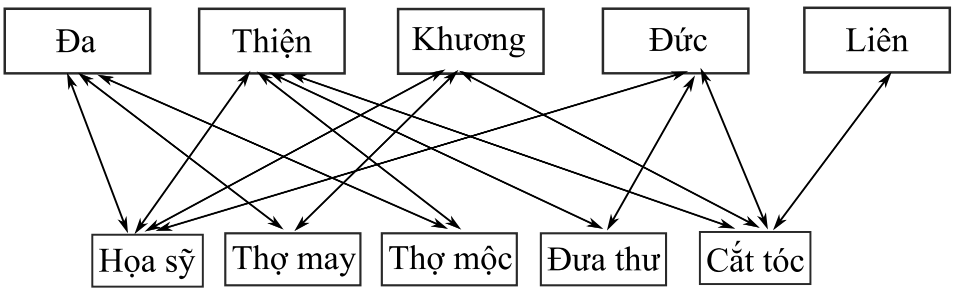
Từ (2) và (4) suy ra thầy Minh không dạy Sinh, còn từ các điều kiện khác trực tiếp cho ta các mũi tên.

Từ sơ đồ ta thấy: Thầy Minh chỉ có thể dạy 2 trong 3 môn Pháp, Địa, Sử. Nhưng thầy dạy Pháp và thầy dạy Địa là khác nhau nên thầy Minh hoặc dạy Pháp - Sử, hoặc là dạy Địa - Sử. Nếu thầy Minh dạy Địa - Sử, suy ra thầy Tuấn dạy Toán - Anh, nhưng điều đó không thể có vì thầy dạy Toán và thầy dạy Tiếng Anh là 2 thầy khác nhau. Vậy thầy Minh dạy Pháp - Sử.

Tiếp theo, thầy Tuấn chỉ có thể dạy 2 trong 3 môn Địa, Toán, Anh. Nhưng Toán và tiếng Anh không thể do 1 thầy dạy nên thầy Tuấn hoặc là dạy Địa - Toán, hoặc là dạy Địa - tiếng Anh. Nếu thầy Tuấn dạy Địa - tiếng Anh, suy ra thầy Vinh dạy Toán - Sinh, điều đó không thoả mãn vì dạy Toán và dạy Sinh là 2 thầy khác nhau. Vậy thầy Tuấn dạy Địa - Toán, suy ra thầy Vinh dạy Sinh – Tiếng Anh.

68 NĂM NGƯỜI BẠN

Ta vẽ sơ đồ (hình 11) biểu thị các điều kiện bài toán, trong đó các đường nối, chẳng hạn ĐA $\leftrightarrow$ HOẠ SĨ có nghĩa ĐA không phải hoạ sĩ:



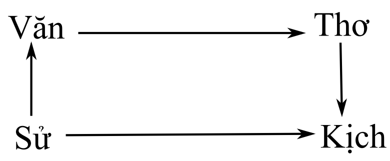
Hình 11:

Dựa vào sơ đồ ta thấy ngay: Thiện - thợ may, Đa - cắt tóc, Liên - hoạ sĩ, Đức - thợ mộc, Khương - đưa thư.

69 SỰ KIỆN TRONG TOA XE LỬA

a. Xét theo nghề nghiệp:

Ta có: Nhà văn không đọc tác phẩm sử nên chỉ có thể đọc thơ hoặc kịch. Nhưng nhà thơ đã đọc kịch, suy ra nhà văn đọc thơ. Tiếp theo, nhà sử học chỉ có thể đọc tác phẩm văn, còn lại nhà viết kịch đọc tác phẩm sử. Để theo dõi, ta viết kết quả theo sơ đồ sau (hình 12)



Hình 12:

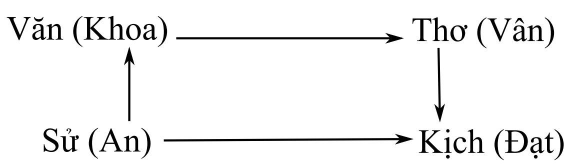
Trong đó ký hiệu Văn $\rightarrow$ Thơ với nghĩa nhà văn đọc tác phẩm thơ.

b. Xét theo tên riêng:

Nhà văn mới có tác phẩm đầu tiên mà An và Vân trước đây đã đọc tác phẩm của nhau, vậy An và Vân không thể là nhà văn. Đạt không bao giờ đọc thơ, căn cứ vào sơ đồ trên Đạt cũng không là nhà văn. Vậy Khoa là nhà văn.

An và Vân hiện giờ không có người nào đọc tác phẩm của người kia, theo sơ đồ trên và Khoa đã là nhà văn suy ra họ là nhà thơ và nhà sử học. Ta có ngay Đạt là nhà viết kịch. Vân đọc tác phẩm của Đạt nên Vân là nhà thơ, còn lại An là nhà sử học.

Ta thấy tất cả các giả thiết qua bài toán đã được sử dụng và kết quả tìm được thoả mãn tất cả điều kiện bài toán. Kết quả viết theo sơ đồ (hình 13).



Hình 13:

70 TUỔI BA CÔ GÁI

- Giả sử ý 1 của Tâm là đúng, khi đó ý 2 của Mùi là sai nên ý 3 của Mùi là đúng, hay Lan 25 tuổi, suy ra ý 2 của Tâm (Tâm ít hơn Lan 2 tuổi) là sai và ý 3 của Tâm là đúng, hay Mùi 21- tuổi.

Với kết quả Lan 25 tuổi và Mùi 21 tuổi thì ý 2 và 3 của Lan đều sai, trái với giả thiết mỗi người chỉ nói sai một ý. Vậy ý 1 của Tâm là sai.

- Do ý 1 của Tâm là sai nên ý 2 và 3 của Tâm là đúng, nghĩa là: Tuổi Tâm + 2 tuổi = Tuổi Lan Tuổi Tâm - 2 tuổi = Tuổi Mùi Ta thấy ý 1 của Mùi (Mùi trẻ hơn Tâm) là đúng và ý 3 của Mùi (Lan hơn Tâm 3 tuổi) là sai nên ý 2 của Mùi là đúng, hay Tâm 23 tuổi. Từ đó suy ra: Lan 25 tuổi và Mùi 22 tuổi.

71 AI LÀ THỦ PHẠM?

Dễ dàng nhận thấy Giôn không thể là thủ phạm vì ngược lại thì ý 1 và ý 3 của Giô đều sai, trái với giả thiết là mỗi người chỉ nói sai 1 ý.

- Giả sử Giêm là thủ phạm: khi đó ý 3 của Giêm là sai và ý 3 của Giôn cũng sai, còn các ý khác của Giêm và Giôn đều đúng. Ý 2 của Giôn đúng suy ra Giêm và Giôn là bạn của nhau, ý 2 của Giêm đúng thì lại suy ra không thể có điều đó. Xảy ra mâu thuẫn. Vậy Giêm không phải là thủ phạm. - Vậy chỉ có thể Giôn là thủ phạm. Xem xét các điều kiện bài toán ta thấy đều thoả mãn.

72 THỦ PHẠM VỤ CHÁY NHÀ

Giả sử John là thủ phạm: Khi đó mỗi người đều nói 1 ý đúng và 1 ý sai, trái với giả thiết bài toán. Vậy John không phải là thủ phạm.

Giả sử Smith là thủ phạm: khi đó John nói đúng cả 2 ý và Smith nói sai cả 2 ý. Brown cũng nói đúng cả 2 ý, trái với giả thiết bài toán là có một người nói 1 ý đúng và 1 ý sai. Vậy Smith cũng không phải là thủ phạm.

Vậy, thủ phạm chỉ có thể là Brown.

Khi đó ta có: John là kẻ chuyên lừa đảo (nói sai cả 2 ý), Smith là ông già được dân phố kính trọng (nói đúng cả 2 ý) và thủ phạm là Brâu (nói 1 ý đúng và 1 ý sai) là người dân phố không có gì đặc biệt.

73 BỮA TỐI THÂN MẬT

Từ (1) và (4) suy ra:

- Tổng số tuổi của 3 người vợ là $(151 - 15)/2 = 68$ tuổi.

- Tổng số tuổi của 3 người chồng là $68 + 15 = 83$ tuổi.

Vì mỗi người chồng đều hơn vợ mình 5 tuổi nên khi cộng tuổi vợ và chồng ở mỗi cặp ta được những số lẻ (6).

Từ (3) và (5) ta có:

$$\text{Tuổi Tuấn} + \text{Tuổi Nguyệt} = 52 \text{ tuổi}$$
$$\text{Tuổi Minh} + \text{Tuổi Nguyệt} = 48 \text{ tuổi}$$

Kết hợp với (6) ta thấy cả Tuấn và Minh đều không phải là chồng của Nguyệt. Suy ra An là chồng của Nguyệt.

Từ (3): Tuổi Tuấn + (Tuổi Nguyệt + 5) = Tuổi Tuấn + Tuổi An = 57 tuổi.

Tuổi 3 người chồng cộng lại là 83, suy ra tuổi Minh là 26.

Từ (5): Tuổi Minh + (Tuổi Nguyệt + 5) = Tuổi Minh + Tuổi An = 53 tuổi, suy ra tuổi Tuấn là 30 tuổi và tuổi An là 27.

Lan trẻ nhất trong 3 cô vợ nên Lan là vợ Minh, suy ra Lan 21 tuổi. Nguyệt là vợ của An nên Nguyệt 22 tuổi. Thu Hương là vợ của Tuấn nên Thu Hương 25 tuổi.

74 CHIA CAM

Ký hiệu số cam có trong mỗi túi là $t_i, i = 1, 2, \ldots, 50$. Theo bài ra ta có $1 \leq t_i \leq 50$ (*)

Và $t_1 + t_2 + \cdots + t_{50} = 100$.

Nếu $t_i = 2$ với mọi i ta có ngay cách chia 50 túi thành 2 nhóm theo điều kiện bài ra: mỗi nhóm 25 túi.

Nếu có ít ra 2 số t_i, t_j khác nhau, chẳng hạn là t_1 và t_2, ta xét 51 số sau:

$$t_1, t_2, t_1 + t_2, t_1 + t_2 + t_3, \ldots, t_1 + t_2 + \cdots + t_{50}$$

Ta nhận thấy: 51 số đều khác nhau và mỗi số đều trong khoảng từ 1 tới 100. Vậy có 2 số có cùng số dư khi chia cho 50, hay hiệu của số lớn và số nhỏ đúng bằng 50. Hai số đó không thể là t_1 và t_2 vì hiệu của t_1 và t_2 không thể bằng 50 (do (*)). Vậy trong 2 số có ít ra một số mới, suy ra hiệu của chúng là tổng một số các t_i, và chúng tạo thành một nhóm có tổng đúng bằng 50.

75 BÀI TOÁN TUỔI

Trong 52 số tự nhiên khác nhau trong khoảng từ 1 tới 100 có tối đa 50 số chẵn, suy ra có tối thiểu 2 số lẻ.

Gọi t là số lẻ lớn nhất và t_i là những số lẻ khác. Trong 52 số tự nhiên đó ta thay các số lẻ t_i tương ứng bằng các hiệu $t - t_i$ thì sẽ được 51 số là chẵn và chỉ còn t là lẻ.

Ta nhận thấy: trong 51 số chẵn trong khoảng từ 1 tới 100 phải có ít ra 2 số bằng nhau. Hai số bằng nhau đó nhất thiết một số có dạng $t - t_i$ và một số là số cho ban đầu, gọi đó là p, ta có: $t = p + t_i$ và được đều phải chứng minh.

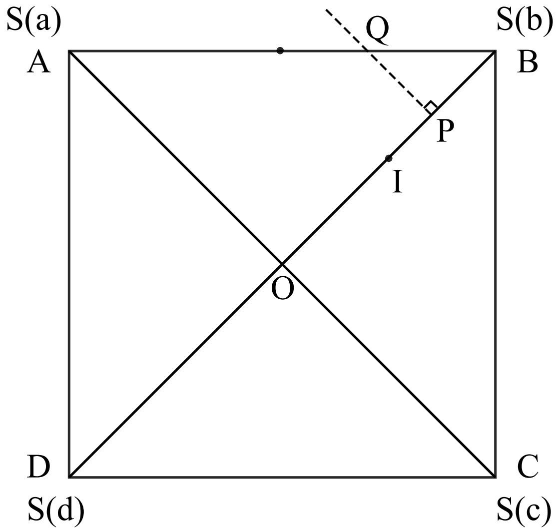
76 THỎ VÀ CHÓ SÓI

Ta ký hiệu cái vườn là hình vuông $ABCD$ với tâm là O, còn các con sói tương ứng ở các đỉnh A, B, C, D là $S(a), S(b), S(c), S(d)$.

Chú thỏ sẽ thoát ra khỏi vườn nếu chạy theo cách sau:

Từ tâm O chạy theo đường chéo thẳng tới 1 đỉnh, chẳng hạn tới đỉnh B. Khi qua trung điểm I của đoạn OB tại 1 vị trí P chạy theo hướng vuông góc với OB, chẳng hạn theo PQ để thoát ra khỏi vườn.

Thật vậy: Khi thỏ chạy từ O tới P nghĩa là tới gần con sói $S(b)$ hơn, các con sói khác đứng nguyên và con sói $S(b)$ cũng vậy (vì nếu sói $S(b)$



Hình 14:

chạy trên cạnh BA thì thỏ sẽ thoát ngay được ra ngoài qua cạnh BC).

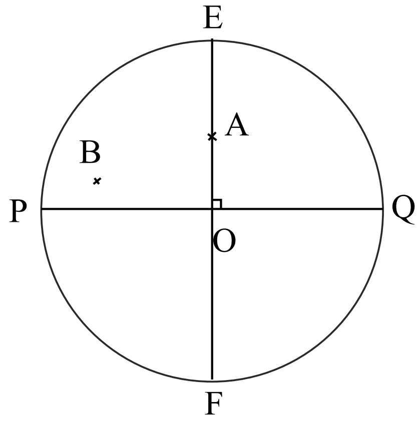
Khi thỏ đổi hướng chạy trên đoạn PQ thì sói $S(b)$ sẽ chạy trên BA để đón thỏ, có thể cả $S(a)$ cũng chạy từ A về phía B. Khi thỏ chạy hết đoạn BQ thì sói chạy hết $1/4$ lần đoạn PQ. Mặt khác, đoạn $BQ = \sqrt{2}PQ$, lớn hơn $1.4 \times PQ$. Vậy thỏ sẽ tới Q trước sói $S(b)$ và thoát ra khỏi vườn (Thỏ cũng đến Q trước cả $S(a)$ vì AQ lớn hơn BQ, do OP lớn hơn PB).

77 TRỒNG HOA TRONG Ô TRÒN

Ký hiệu các cây là A, B, C, D và tâm của vườn là O. Kẻ bán kính OE qua A và kẻ đường kính PQ vuông góc với OE. Ta nhận thấy:

- Nếu trên nửa hình tròn chứa A tạo bởi đường kính PQ có 1 điểm nữa khác A,chẳng hạn là B thì khoảng cách AB sẽ nhỏ hơn EP (hay EQ), nghĩa là nhỏ hơn $\sqrt{2}$(m).

- Nếu trên nửa hình tròn nói trên không có điểm nào nữa ngoài A thì cả 3 điểm B, C, D đều thuộc nửa hình tròn kia. Kẻ đường kính EF thì bán kính OF chia nửa hình tròn sau thành 2 phần bằng nhau. Ta có 3 điểm B, C, D nằm trong 2 phần vừa chia, suy ra ắt phải có 1 phần chứa 2 điểm và khoảng cách của chúng sẽ nhỏ hơn $\sqrt{2}$(m).



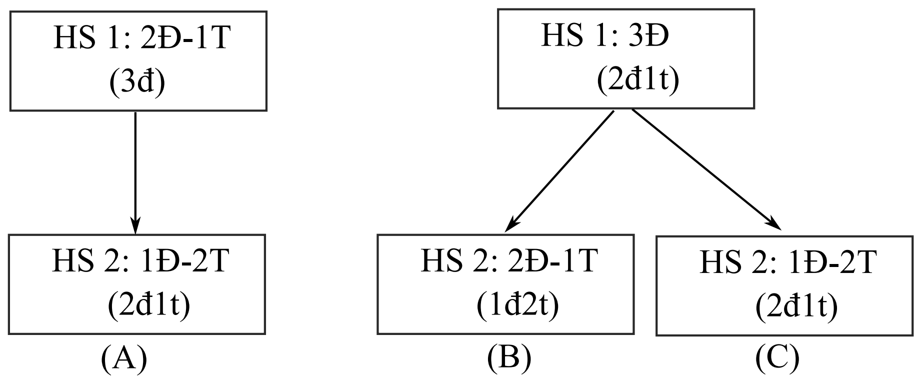
Hình 15:

78 BỐN HỘP KÍN

Người học sinh mù đã suy đoán như sau:

- Học sinh (HS) 1 đã lấy được 2 bóng đỏ và biết chắc chắn màu quả bóng còn lại thì hộp của anh ta có nhãn hoặc là 2Đ-1T và bóng còn lại màu đỏ (1) hoặc 3Đ và bóng còn lại màu trắng (2). Nếu nhãn ở hộp anh ta không là 1 trong 2 khả năng đó thì anh ta không thể dám chắc được như vậy.

- HS 2 lấy được 1 bóng đỏ và 1 bóng trắng và cũng biết chắc chắn màu bóng còn lại trong hộp, thế thì ứng với (1) nhãn hộp anh ta phải là 1Đ-2T và bóng còn lại màu đỏ, ứng với (2) nhãn hộp anh ta phải là: hoặc 2Đ-1T và bên trong đựng 1 đỏ 2 trắng, hoặc 1Đ-2T và bên trong đựng 2 đỏ 1 trắng. Ta biểu thị bằng sơ đồ sau (hình 16):



Hình 16:

Ta thấy ngay trường hợp (C) không xảy ra.

Nếu trường hợp (B) xảy ra thì HS 3 rút ra 2 bóng trắng, bóng còn lại trong hộp phải là trắng (3t), suy ra nhãn hộp anh ta phải là 1Đ-2T. Trái với giả thiết là anh ta không suy đoán được màu quả bóng còn lại trong hộp.

Vậy trường hợp (A) đã xảy ra. HS 3 lấy được 2 bóng trắng và không suy đoán được màu bóng còn lại thì chỉ có thể là:

- HS1: 2Đ-1T (3đ)
- HS2: 1Đ-2T (2đ1t)
- HS3: 3Đ (2t...)

Vì nếu ở HS 3 là nhãn 3T thì bên trong là 1 đỏ 2 trắng và HS 3 suy đoán được ngay.

Do đó nhãn ở hộp học sinh mù là 3T và bóng bên trong là 1 đỏ và 2 trắng, suy ra bóng còn lại trong hộp HS 3 là bóng trắng.

79 CÁC ĐỀ CỬ VIÊN KHÓ CHIỀU

- Nếu chọn An vào BCĐ thì cũng phải chọn Ba (theo (1)), khi đó không thể có Tuấn (theo 5). Còn 3 người, ta cần chọn thêm 2 người nữa. Hai người này chỉ có thể Chung và Phương vì: theo (3) Chung không muốn làm việc với Ba nếu thiếu Phương và theo (4) Đức không thể cùng Phương.

Nhưng với cách chọn như vậy thì không thể phân bổ được các chức vị trong BCĐ vì chỉ có Phương là nhận làm chủ tịch và không có ai làm phó chủ tịch. Vậy An không thể vào BCĐ.

- Trừ An ra còn 5 người, ta cần loại thêm 1 người nữa. Ta thấy: theo (4) Đức đã vào BCĐ thì không thể có Tuấn, không thể có Phương, suy ra BCĐ không đủ 4 người. Vậy Đức bị loại và BCĐ gồm 4 người là Ba, Chung, Phương, Tuấn.

Đối chiếu với điều kiện bài toán, ta thấy cách chọn BCĐ như trên là thoả mãn cách phân bổ các chức vị như sau: Phương làm chủ tịch (vì không có ai nhận nữa), Tuấn làm phó chủ tịch (vì Ba không nhận chức phó chủ tịch và Chung không thể là phó chủ tịch khi Phương đã là chủ tịch). Ba không nhận cả chức vụ thư ký, suy ra Chung làm thư ký và Ba làm thủ quỹ và Ba làm thủ quỹ.

80 BÉ NGỌC VÀ BÓNG MÀU

Ở (3) hộp màu "trung tính" không thể là hộp màu đen vì ở (4) cho thấy hộp màu đen đựng hai bóng màu "lạnh". Vậy hộp đó là hộp màu trắng và nó đựng 1 bóng đỏ 1 bóng xanh lá cây. Theo (4) hộp đen đựng 2 bóng xanh nào đó, nhưng theo kết quả vừa có và theo (5) suy ra ngay: Hộp đen đựng 1 bóng xanh lá cây và 1 bóng xanh da trời.

Theo (5) bóng trắng và bóng xanh da trời ở trong một hộp. Theo kết quả trên hộp này không phải hộp màu "trung tính" , theo (2) không phải màu đỏ, theo (6) không phải hộp màu xanh da trời. Vậy đó là hộp màu xanh lá cây.

Còn lại 2 hộp, hộp màu đỏ và màu xanh da trời chứa 4 bóng gồm 2 đen, 1 trắng và 1 đỏ. Theo (1) và (6): bóng đỏ không có trong hộp đỏ và 1 bóng đen trong hộp xanh da trời. Vậy hộp xanh da trời chứa 1 bóng đỏ và 1 bóng đen, suy ra hộp đỏ chứa 1 bóng đen và 1 bóng trắng.

Ta có lời giải duy nhất viết gọn như sau:

- Trắng (Đỏ + Xanh lá cây)
- Đen (Xanh lá cây + Xanh da trời)
- Đỏ (Đen + Trắng)
- Xanh Da Trời (Đỏ + Đen)

MỤC LỤC