

Mục lục

Chuyên đề 5. Nguyên Hàm - Tích Phân	3
§1. Nguyên Hàm	3
§2. Một Số Phương Pháp Tìm Nguyên Hàm.....	4
§3. Tích Phân	7
§4. Một Số Phương Pháp Tính Tích Phân.....	9
§5. Tích Phân Của Các Hàm Số Thường Gặp	17
§6. Ứng Dụng Của Tích Phân.....	29

Chuyên đề 5

Nguyên Hàm - Tích Phân

§1. Nguyên Hàm

5.1. Tìm các họ nguyên hàm sau :

$$a) \int (x^7 + 4x^3 - x) dx;$$

$$b) \int \left(\sqrt[3]{x} + 1 - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx;$$

$$c) \int (2x - 3)^2 dx;$$

$$d) \int \left(3 \sin x + \frac{2}{x} \right) dx;$$

$$e) \int \frac{x + \sqrt{x} + 1}{\sqrt[3]{x}} dx;$$

$$f) \int \frac{x^3 + 5x^2 - 3x + \sqrt{x}}{x\sqrt{x}} dx;$$

$$g) \int \frac{4^x + 1}{2^x} dx;$$

$$h) \int \tan^2 x dx;$$

$$i) \int \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} dx.$$

Lời giải.

$$a) \int (x^7 + 4x^3 - x) dx = \frac{x^8}{8} + x^4 - \frac{x^2}{2} + C.$$

$$b) \int \left(\sqrt[3]{x} + 1 - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx = \int \left(x^{\frac{1}{3}} + 1 - x^{-\frac{1}{2}} \right) dx = \frac{3x^{\frac{4}{3}}}{4} + x - 2x^{\frac{1}{2}} + C.$$

$$c) \int (2x - 3)^2 dx = \int (4x^2 - 12x + 9) dx = \frac{4x^3}{3} - 6x^2 + 9x + C.$$

$$d) \int \left(3 \sin x + \frac{2}{x} \right) dx = -3 \cos x + 2 \ln |x| + C.$$

$$e) \int \frac{x + \sqrt{x} + 1}{\sqrt[3]{x}} dx = \int \left(x^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{1}{6}} + x^{-\frac{1}{3}} \right) dx = \frac{3x^{\frac{5}{3}}}{5} + \frac{6x^{\frac{7}{6}}}{7} + \frac{3x^{\frac{2}{3}}}{2} + C.$$

$$f) \int \frac{x^3 + 5x^2 - 3x + \sqrt{x}}{x\sqrt{x}} dx = \int \left(x^{\frac{3}{2}} + 5x^{\frac{1}{2}} - 3x^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{x} \right) dx = \frac{2x^{\frac{5}{2}}}{5} + \frac{10x^{\frac{3}{2}}}{3} - 6x^{\frac{1}{2}} + \ln |x| + C.$$

$$g) \int \frac{4^x + 1}{2^x} dx = \int \left[2^x + \left(\frac{1}{2} \right)^x \right] dx = \frac{2^x}{\ln 2} + \frac{\left(\frac{1}{2} \right)^x}{\ln \frac{1}{2}} + C = \frac{2^x}{\ln 2} - \frac{1}{2^x \ln 2} + C.$$

$$h) \int \tan^2 x dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = \tan x - x + C.$$

$$i) \int \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} dx = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} \right) dx = \tan x - \cot x + C.$$

5.2. Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = x^3 + 1$, biết $F(1) = 2$.

Lời giải. Ta có $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ nên có dạng $F(x) = \int f(x) dx = \frac{x^4}{4} + x + C$.

$$\text{Lại có } F(1) = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{4} + 1 + C = 2 \Leftrightarrow C = \frac{3}{4}. \text{ Vậy } F(x) = \frac{x^4}{4} + x + \frac{3}{4}.$$

5.3. Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = ax + \frac{b}{x^2}$, biết $F(-1) = 2$, $F(1) = 4$ và $F(2) = 5$.

Lời giải. Ta có $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ nên có dạng $F(x) = \int \left(ax + \frac{b}{x^2} \right) dx = \frac{ax^2}{2} - \frac{b}{x} + C$.

Lại có $\begin{cases} F(-1) = 2 \\ F(1) = 4 \\ F(2) = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}a + b + C = 2 \\ \frac{1}{2}a - b + C = 4 \\ 2a - \frac{1}{2}b + C = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ C = \frac{5}{2} \end{cases}$. Vậy $F(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{x} + \frac{5}{2}$.

5.4. Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x) = \frac{1}{x}$ thỏa $F(1) = -1$. Tìm x để $2F(x) = \frac{1}{F(x)+1} - 1$.

Lời giải. Ta có $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x) = \frac{1}{x}$ nên có dạng $F(x) = \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$.

Lại có $F(1) = -1 \Rightarrow C = -1 \Rightarrow F(x) = \ln|x| - 1$.

Khi đó $2F(x) = \frac{1}{F(x)+1} - 1 \Leftrightarrow 2(\ln|x| - 1) = \frac{1}{\ln|x|} - 1$ (*).

Với điều kiện $x \neq \pm 1$ ta có (*) $\Leftrightarrow 2\ln^2|x| - \ln|x| - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \ln|x| = 1 \\ \ln|x| = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm e \\ x = \pm \frac{1}{\sqrt{e}} \end{cases}$ (thỏa mãn).

Vậy $x = \pm e$ và $x = \pm \frac{1}{\sqrt{e}}$.

§2. Một Số Phương Pháp Tìm Nguyên Hàm

5.5. Tìm các họ nguyên hàm sau :

$$\begin{array}{lll} \text{a)} I = \int (3x+3)^9 dx; & \text{b)} I = \int \frac{4x-1}{2x+1} dx; & \text{c)} I = \int (e^{3x+1} + \cos 5x) dx; \\ \text{d)} I = \int \sin 5x \sin x dx; & \text{e)} I = \int x(x^2+1)^{2013} dx; & \text{f)} I = \int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx; \\ \text{g)} I = \int \frac{e^x}{e^x+1} dx; & \text{h)} I = \int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x} dx; & \text{i)} I = \int \cos^5 x dx. \end{array}$$

Lời giải.

$$\begin{aligned} \text{a)} I &= \frac{1}{3} \int (3x+3)^9 d(3x+3) = \frac{1}{3} \frac{(3x+3)^{10}}{10} + C = \frac{1}{30}(3x+3)^{10} + C. \\ \text{b)} I &= \int \left(2 - \frac{3}{2x+1}\right) dx = \int 2dx - \frac{1}{2} \int \frac{3}{2x+1} d(2x+1) = 2x - \frac{3}{2} \ln|2x+1| + C. \\ \text{c)} I &= \int e^{3x+1} dx + \int \cos 5x dx = \frac{1}{3} \int e^{3x+1} d(3x+1) + \frac{1}{5} \int \cos 5x d(5x) = \frac{1}{3} e^{3x+1} + \frac{1}{5} \sin 5x + C. \\ \text{d)} I &= \frac{1}{2} \int (\cos 4x - \cos 6x) dx = \frac{1}{8} \int \cos 4x d(4x) - \frac{1}{12} \int \cos 6x d(6x) = \frac{1}{8} \sin 4x - \frac{1}{12} \sin 6x + C. \\ \text{e)} I &= \frac{1}{2} \int (x^2+1)^{2013} d(x^2+1) = \frac{1}{2} \frac{(x^2+1)^{2014}}{2014} + C = \frac{(x^2+1)^{2014}}{4028} + C. \\ \text{f)} I &= \frac{1}{2} \int (x^2+1)^{-\frac{1}{2}} d(x^2+1) = \frac{1}{2} \frac{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = \sqrt{x^2+1} + C. \\ \text{g)} I &= \int \frac{1}{e^x+1} d(e^x+1) = \ln|e^x+1| + C. \\ \text{h)} I &= \int (1+\ln x)^{\frac{1}{2}} d(1+\ln x) = \frac{(1+\ln x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2(1+\ln x)\sqrt{1+\ln x}}{3} + C. \\ \text{i)} I &= \int \cos^4 x \cos x dx = \int (1-\sin^2 x)^2 d(\sin x) = \sin x - \frac{2\sin^3 x}{3} + \frac{\sin^5 x}{5} + C. \end{aligned}$$

5.6. Tìm các họ nguyên hàm sau :

$$\begin{array}{lll} \text{a)} I = \int \frac{x^3}{x^2+1} dx; & \text{b)} I = \int x^5 \sqrt{x^3+1} dx; & \text{c)} I = \int x(x-1)^{2013} dx; \\ \text{d)} I = \int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x+1}} dx; & \text{e)} I = \int \frac{2\ln x - 1}{x \ln x} dx; & \text{f)} I = \int \sin^3 x \sqrt{1+\cos x} dx. \end{array}$$

Lời giải.

a) Đặt $u = x^2 + 1 \Rightarrow du = 2x dx$, ta có :

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{x^2 x}{x^2 + 1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{u - 1}{u} du = \frac{1}{2} \int \left(1 - \frac{1}{u}\right) du \\ &= \frac{1}{2} (u - \ln|u|) + C = \frac{1}{2} (x^2 + 1) - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + C \end{aligned}$$

b) Đặt $u = \sqrt{x^3 + 1} \Leftrightarrow u^2 = x^3 + 1 \Rightarrow 2udu = 3x^2 dx$, ta có :

$$\begin{aligned} I &= \int x^3 x^2 \sqrt{x^3 + 1} dx = \int (u^2 - 1) u \frac{2u}{3} du = \frac{2}{3} \int (u^4 - u^2) du \\ &= \frac{2}{3} \left(\frac{u^5}{5} + \frac{u^3}{3} \right) + C = \frac{2(\sqrt{x^3 + 1})^5}{15} + \frac{2(\sqrt{x^3 + 1})^3}{9} + C \end{aligned}$$

c) Đặt $u = x - 1 \Rightarrow du = dx$, ta có :

$$\begin{aligned} I &= \int (u + 1) u^{2013} du = \int (u^{2014} + u^{2013}) du \\ &= \frac{u^{2015}}{2015} + \frac{u^{2014}}{2014} + C = \frac{(x - 1)^{2015}}{2015} + \frac{(x - 1)^{2014}}{2014} + C \end{aligned}$$

d) Đặt $u = \sqrt{e^x + 1} \Leftrightarrow u^2 = e^x + 1 \Rightarrow 2udu = e^x dx$, ta có :

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{e^x \cdot e^x}{\sqrt{e^x + 1}} dx = \int \frac{u^2 - 1}{u} 2udu = 2 \int (u^2 - 1) du \\ &= 2 \left(\frac{u^3}{3} - u \right) + C = \frac{2(\sqrt{e^x + 1})^3}{3} - 2\sqrt{e^x + 1} + C \end{aligned}$$

e) Đặt $u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx$, ta có :

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{2u - 1}{u} du = \int \left(2 - \frac{1}{u}\right) du \\ &= 2u - \ln|u| + C = 2\ln x - \ln|\ln x| + C \end{aligned}$$

f) Đặt $u = \sqrt{1 + \cos x} \Leftrightarrow u^2 = 1 + \cos x \Rightarrow 2udu = -\sin x dx$, ta có :

$$\begin{aligned} I &= \int \sin^2 x \sin x \sqrt{1 + \cos x} dx = \int (1 - \cos^2 x) \sqrt{1 + \cos x} \sin x dx \\ &= - \int (1 - (u^2 - 1)^2) u \cdot 2udu = - \int (-u^4 + 2u^2) 2u^2 du = 2 \int (u^6 - 2u^4) du \\ &= 2 \left(\frac{u^7}{7} - \frac{2u^5}{5} \right) + C = \frac{2(\sqrt{1 + \cos x})^7}{7} - \frac{4(\sqrt{1 + \cos x})^5}{5} + C \end{aligned}$$

5.7. Tìm các họ nguyên hàm sau :

- | | | |
|------------------------------------|-----------------------------|-----------------------------------|
| a) $I = \int (x - 1) e^x dx;$ | b) $I = \int x e^{2x} dx;$ | c) $I = \int x \cos x dx;$ |
| d) $I = \int (2x - 1) \sin 2x dx;$ | e) $I = \int x^2 \ln x dx;$ | f) $I = \int (x^3 + 1) \ln x dx.$ |

Lời giải.

a) Đặt $\begin{cases} u = x - 1 \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = e^x \end{cases}$, ta có :

$$I = (x - 1)e^x - \int e^x dx = (x - 1)e^x - e^x + C = (x - 2)e^x + C$$

b) Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = e^{2x}dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \frac{1}{2}e^{2x} \end{cases}$, ta có :

$$I = \frac{1}{2}xe^{2x} - \int \frac{1}{2}e^{2x}dx = \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + C$$

c) Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = \cos xdx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \sin x \end{cases}$, ta có :

$$I = x \sin x - \int \sin xdx = x \sin x + \cos x + C$$

d) Đặt $\begin{cases} u = 2x - 1 \\ dv = \sin 2xdx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2dx \\ v = -\frac{1}{2}\cos 2x \end{cases}$, ta có :

$$I = -\frac{1}{2}(2x - 1)\cos 2x + \int \cos 2xdx = -\frac{1}{2}(2x - 1)\cos 2x + \frac{1}{2}\sin 2x + C$$

e) Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = x^2dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x}dx \\ v = \frac{x^3}{3} \end{cases}$, ta có :

$$I = \frac{x^3}{3} \ln x - \int \frac{x^3}{3} \frac{1}{x}dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{1}{3} \int x^2dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9} + C$$

f) Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = (x^3 + 1)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x}dx \\ v = \frac{x^4}{4} + x \end{cases}$, ta có :

$$I = \left(\frac{x^4}{4} + x \right) \ln x - \int \left(\frac{x^4}{4} + x \right) \frac{1}{x}dx = \left(\frac{x^4}{4} + x \right) \ln x - \frac{x^4}{16} - x + C$$

5.8. Tìm các họ nguyên hàm sau :

$$\begin{array}{lll} a) I = \int \ln(2x+1)dx; & b) I = \int \ln(x^2+2x)dx; & c) I = \int x^2e^{2x-1}dx; \\ d) I = \int x^2 \cos xdx; & e) I = \int e^x \sin xdx; & f) I = \int e^x \cos 2xdx. \end{array}$$

Lời giải.

a) Đặt $\begin{cases} u = \ln(2x+1) \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{2}{2x+1}dx \\ v = x \end{cases}$, ta có :

$$I = x \ln(2x+1) - \int \frac{2x}{2x+1}dx = \int \left(1 - \frac{1}{2x+1} \right) dx = x - \frac{1}{2} \ln|2x+1| + C$$

b) Đặt $\begin{cases} u = \ln(x^2+2x) \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{2x+2}{x^2+2x}dx \\ v = x \end{cases}$, ta có :

$$\begin{aligned} I &= x \ln(x^2+2x) - \int x \frac{2x+2}{x^2+2x}dx = x \ln(x^2+2x) - \int \left(2 - \frac{2}{x+2} \right) dx \\ &= x \ln(x^2+2x) - 2x + 2 \ln|x+2| + C \end{aligned}$$

c) Đặt $\begin{cases} u = x^2 \\ dv = e^{2x-1}dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2xdx \\ v = \frac{1}{2}e^{2x-1} \end{cases}$, ta có :

$$I = \frac{1}{2}x^2e^{2x-1} - \int xe^{2x-1}dx = \frac{1}{2}x^2e^{2x-1} - I_1$$

Lại đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = e^{2x-1}dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \frac{1}{2}e^{2x-1} \end{cases}$, ta có :

$$I_1 = \frac{1}{2}xe^{2x-1} - \frac{1}{2} \int e^{2x-1}dx = \frac{1}{2}xe^{2x-1} - \frac{1}{4}e^{2x-1} + C$$

Vậy $I = \frac{1}{2}x^2 e^{2x-1} - \left(\frac{1}{2}xe^{2x-1} - \frac{1}{4}e^{2x-1} \right) + C = \frac{1}{4}(2x^2 - 2x + 1)e^{2x-1} + C.$

d) Đặt $\begin{cases} u = x^2 \\ dv = \cos x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2x dx \\ v = \sin x \end{cases}$, ta có :

$$I = x^2 \sin x - \int 2x \sin x dx = x^2 \sin x - I_1$$

Lại đặt $\begin{cases} u = 2x \\ dv = \sin x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2 dx \\ v = -\cos x \end{cases}$, ta có :

$$I_1 = -2x \cos x + \int 2 \cos x dx = -2x \cos x + 2 \sin x + C$$

Vậy $I = x^2 \sin x - (-2x \cos x + 2 \sin x) + C = x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + C.$

e) Đặt $\begin{cases} u = e^x \\ dv = \sin x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = e^x dx \\ v = -\cos x \end{cases}$, ta có :

$$I = -e^x \cos x + \int e^x \cos x dx = -e^x \cos x + I_1$$

Lại đặt $\begin{cases} u = e^x \\ dv = \cos x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = e^x dx \\ v = \sin x \end{cases}$, ta có :

$$I_1 = e^x \sin x - \int e^x \sin x dx = e^x \sin x - I$$

Vậy $I = -e^x \cos x + e^x \sin x - I \Leftrightarrow I = \frac{1}{2}e^x (\sin x - \cos x) + C.$

f) Đặt $\begin{cases} u = e^x \\ dv = \cos 2x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = e^x dx \\ v = \frac{1}{2} \sin 2x \end{cases}$, ta có :

$$I = \frac{1}{2}e^x \sin 2x - \frac{1}{2} \int e^x \sin 2x dx = \frac{1}{2}e^x \sin 2x - \frac{1}{2}I_1$$

Lại đặt $\begin{cases} u = e^x \\ dv = \sin 2x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = e^x dx \\ v = -\frac{1}{2} \cos 2x \end{cases}$, ta có :

$$I_1 = -\frac{1}{2}e^x \cos 2x + \frac{1}{2} \int e^x \cos 2x dx = -\frac{1}{2}e^x \cos 2x + \frac{1}{2}I$$

Vậy $I = \frac{1}{2}e^x \sin 2x + \frac{1}{4}e^x \cos 2x - \frac{1}{4}I \Leftrightarrow I = \frac{2}{5}e^x \sin 2x + \frac{1}{5}e^x \cos 2x + C.$

§3. Tích Phân

5.9. Tính các tích phân sau :

a) $I = \int_0^1 5x^4 dx;$

b) $I = \int_1^e \frac{dx}{x};$

c) $I = \int_0^{\ln 2} e^{-x} dx;$

d) $I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos 3x dx;$

e) $I = \int_{\frac{1}{2}}^1 (2x-1)^{2013} dx;$

f) $I = \int_0^1 (-2x+1)^7 dx.$

Lời giải.

a) $I = x^5 \Big|_0^1 = 1.$

b) $I = \ln |x| \Big|_1^e = \ln e - \ln 1 = 1.$

c) $I = -e^{-x} \Big|_0^{\ln 2} = -\left(e^{-\ln 2} - e^0\right) = \frac{1}{2}.$

d) $I = \frac{1}{3} \sin 3x \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{3} \sin \frac{\pi}{2} - \frac{1}{3} \sin 0 = \frac{1}{3}$.

e) $I = \frac{1}{2} \frac{(2x-1)^{2014}}{2014} \Big|_{\frac{1}{2}}^1 = \frac{1}{4028}$.

f) $I = -\frac{1}{2} \int_0^1 (-2x+1)^7 d(-2x+1) = -\frac{(-2x+1)^8}{16} \Big|_0^1 = 0$.

5.10. Tính các tích phân sau :

a) $I = \int_0^1 e^{2-5x} dx$;

b) $I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin \left(2x + \frac{\pi}{6}\right) dx$;

c) $I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\cos^2 2x} dx$;

d) $I = \int_{-1}^0 \frac{4}{(3-5x)^3} dx$;

e) $I = \int_{-1}^1 \sqrt{5-4x} dx$;

f) $I = \int_1^2 \sqrt[3]{3x+2} dx$.

Lời giải.

a) $I = -\frac{1}{5} \int_0^1 e^{2-5x} d(2-5x) = -\frac{1}{5} e^{2-5x} \Big|_0^1 = \frac{e^2 - e^{-3}}{5}$.

b) $I = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin \left(2x + \frac{\pi}{6}\right) d\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2} \cos \left(2x + \frac{\pi}{6}\right) \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

c) $I = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\cos^2 2x} d(2x) = \frac{1}{2} \tan 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

d) $I = 4 \int_{-1}^0 (3-5x)^{-3} dx = -2(3-5x)^{-2} \Big|_{-1}^0 = \frac{11}{288}$.

e) $I = \int_{-1}^1 (5-4x)^{\frac{1}{2}} dx = -\frac{1}{4} \frac{(5-4x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \Big|_{-1}^1 = \frac{13}{3}$.

f) $I = \int_1^2 (3x+2)^{\frac{1}{3}} dx = \frac{3(3x+2)^{\frac{4}{3}}}{4} \Big|_1^2 = 12 - \frac{3\sqrt[3]{625}}{4}$.

5.11. Tính các tích phân sau :

a) $I = \int_1^2 (6x^2 - 4x + 1) dx$;

b) $I = \int_1^4 (2x + \sqrt{x}) dx$;

c) $I = \int_0^{\ln 2} (e^x + 2x) dx$;

d) $I = \int_2^4 \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 dx$;

e) $I = \int_0^1 \frac{5x+3}{x+2} dx$;

f) $I = \int_0^1 \frac{x^2 - 3x + 3}{x-2} dx$.

Lời giải.

a) $I = (2x^3 - 2x^2 + x) \Big|_1^2 = 9$.

b) $I = \int_1^4 \left(2x + x^{\frac{1}{2}}\right) dx = \left(x^2 + \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}\right) \Big|_1^4 = \frac{59}{3}$.

c) $I = (e^x + x^2) \Big|_0^{\ln 2} = 1 + \ln^2 2$.

d) $I = \int_2^4 \left(x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}\right) dx = \left(\frac{x^3}{3} + 2x - \frac{1}{x}\right) \Big|_2^4 = \frac{275}{12}$.

e) $I = \int_0^1 \left(5 - \frac{7}{x+2} \right) dx = (5x - 7 \ln|x+2|)|_0^1 = 5 - 7 \ln \frac{3}{2}$.

f) $I = \int_0^1 \left(x - 1 + \frac{1}{x-2} \right) dx = \left(\frac{x^2}{2} - x + \ln|x-2| \right)|_0^1 = e - \frac{1}{2} - \ln 2$.

5.12. Tính các tích phân sau :

a) $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + \sin \frac{x}{2} \right) \cos \frac{x}{2} dx; \quad$ b) $I = \int_0^{\frac{\pi}{8}} \cos^2 2x dx; \quad$ c) $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2\cos^2 x + 1}{1 - \sin^2 x} dx;$
 d) $I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos^2 x}{\sin^2 2x} dx; \quad$ e) $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 3x \cos x dx; \quad$ f) $I = \int_0^1 x(x-1)^{2013} dx.$

Lời giải.

a) $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \sin x \right) dx = \left(2 \sin \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \cos x \right)|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2} + \sqrt{2}$.

b) $I = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{8}} (1 + \cos 4x) dx = \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{4} \sin 4x \right)|_0^{\frac{\pi}{8}} = \frac{\pi + 2}{16}$.

c) $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2\cos^2 x + 1}{\cos^2 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(2 + \frac{1}{\cos^2 x} \right) dx = (2x + \tan x)|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi + 2}{2}$.

d) $I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos^2 x}{\sin^2 2x} dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos^2 x}{4\sin^2 x \cos^2 x} dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{4\sin^2 x} dx = -\frac{1}{4} \cot x|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{6}$.

e) $I = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos 2x + \cos 4x) dx = \left(\frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{8} \sin 4x \right)|_0^{\frac{\pi}{2}} = 0$.

f) $I = \int_0^1 (x-1+1)(x-1)^{2013} dx = \left(\frac{(x-1)^{2015}}{2015} + \frac{(x-1)^{2014}}{2014} \right)|_0^1 = -\frac{1}{4058210}$.

§4. Một Số Phương Pháp Tính Tích Phân

5.13. Tính các tích phân sau :

a) $I = \int_0^1 \frac{1}{3+x^2} dx; \quad$ b) $I = \int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{3-x^2} dx; \quad$ c) $I = \int_{\frac{2}{\sqrt{3}}}^2 \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx;$

d) $I = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx; \quad$ e) $I = \int_1^2 \frac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}} dx; \quad$ f) $I = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^2 x}{3^x+1} dx.$

Lời giải.

a) Đặt $x = \sqrt{3} \tan t, t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow dx = \frac{\sqrt{3}}{\cos^2 t} dt = \sqrt{3}(1 + \tan^2 t) dt$.

Đổi cận $x=0 \Rightarrow t=0; x=1 \Rightarrow t=\frac{\pi}{6}$, ta có :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{3+3\tan^2 t} \sqrt{3}(1+\tan^2 t) dt = \frac{1}{\sqrt{3}} \int_0^{\frac{\pi}{6}} dt = \frac{1}{\sqrt{3}} t|_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\pi}{6\sqrt{3}}$$

b) Đặt $x = \sqrt{3} \sin t$, $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow dx = \sqrt{3} \cos t dt$.

Đổi cận $x = 0 \Rightarrow t = 0$; $x = 1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{6}$, ta có :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{3 - 3\sin^2 t} \sqrt{3} \cos t dt = 3 \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^2 t dt = \frac{3}{2} \int_0^{\frac{\pi}{6}} (1 + \cos 2t) dt = \left(\frac{3}{2}t + \frac{3}{4} \sin 2t \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{2\pi + 3\sqrt{3}}{8}$$

c) Đặt $x = \frac{1}{\sin t}$, $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \setminus \{0\} \Rightarrow dx = -\frac{\cos t}{\sin^2 t} dt$.

Đổi cận $x = \frac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow t = \frac{\pi}{3}$; $x = 2 \Rightarrow t = \frac{\pi}{6}$, ta có :

$$I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\frac{1}{\sin t} \sqrt{\frac{1}{\sin^2 t} - 1}} \frac{\cos t}{\sin^2 t} dt = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} dt = t \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{6}$$

d) Đặt $x = \sin t$, $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow dx = \cos t dt$.

Đổi cận $x = 0 \Rightarrow t = 0$; $x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow t = \frac{\pi}{4}$, ta có :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 t}{\sqrt{1 - \sin^2 t}} \cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 t dt = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 - \cos 2t) dt = \left(\frac{1}{2}t - \frac{1}{4} \sin 2t \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi - 2}{8}$$

e) Đặt $x = \frac{1}{t} \Rightarrow dx = -\frac{1}{t^2} dt$. Đổi cận $x = 1 \Rightarrow t = 1$; $x = 2 \Rightarrow t = \frac{1}{2}$, ta có :

$$I = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{\frac{1}{t^2} \sqrt{1 + \frac{1}{t^2}}} \frac{1}{t^2} dt = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{t}{\sqrt{1 + t^2}} dt = \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{\sqrt{1 + t^2}} d(1 + t^2) = \sqrt{1 + t^2} \Big|_{\frac{1}{2}}^1 = \frac{2\sqrt{2} - \sqrt{5}}{2}$$

f) Đặt $x = -t \Rightarrow dx = -dt$. Đổi cận $x = -\pi \Rightarrow t = \pi$; $x = \pi \Rightarrow t = -\pi$, ta có :

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^2(-t)}{3^{-t} + 1} dt = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^2 t}{3^t + 1} dt = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{3^t \sin^2 t}{1 + 3^t} dt = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{3^x \sin^2 x}{1 + 3^x} dx$$

$$\text{Suy ra } 2I = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{\sin^2 x}{1 + 3^x} + \frac{3^x \sin^2 x}{1 + 3^x} \right) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x dx = \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \sin 2x \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} = \pi \Leftrightarrow I = \frac{\pi}{2}.$$

5.14. Tính các tích phân sau :

a) $I = \int_0^1 x^3 (1 + x^4)^3 dx$; b) $I = \int_0^1 \frac{x^3}{x^2 + 1} dx$; c) $I = \int_0^1 \frac{x+2}{x^2 + 4x + 7} dx$;

d) $I = \int_0^1 (2x+1)e^{x^2+x+1} dx$; e) $I = \int_0^1 \frac{(x-2)^2}{x^2+4} dx$; f) $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (e^{\cos x} + \sin x) \sin x dx$.

Lời giải.

a) $I = \frac{1}{4} \int_0^1 (1 + x^4)^3 d(1 + x^4) = \frac{1}{16} (1 + x^4)^4 \Big|_0^1 = \frac{15}{16}$.

b) $I = \int_0^1 \left(x - \frac{x}{x^2 + 1} \right) dx = \int_0^1 x dx - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{x^2 + 1} d(x^2 + 1) = \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 - \frac{1}{2} \ln |x^2 + 1| \Big|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln 2$.

c) $I = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{x^2 + 4x + 7} d(x^2 + 4x + 7) = \frac{1}{2} \ln |x^2 + 4x + 7| \Big|_0^1 = \frac{1}{2} \ln \frac{12}{7}$.

d) $I = \int_0^1 (2x+1)e^{x^2+x+1} dx = \int_0^1 e^{x^2+x+1} d(2x+1) = e^{x^2+x+1} \Big|_0^1 = e^3 - e$.

e) $I = \int_0^1 \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 + 4} dx = \int_0^1 dx - 2 \int_0^1 \frac{1}{x^2 + 4} d(x^2 + 4) = (x - 2 \ln(x^2 + 4)) \Big|_0^1 = 1 - 2 \ln \frac{5}{4}$.

f) $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\cos x} \sin x dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\cos x} d(\cos x) + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 2x) dx$
 $= \left(-e^{\cos x} + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \sin 2x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = e - 1 + \frac{\pi}{4}$.

5.15. Tính các tích phân sau :

a) $I = \int_0^1 x^3 \sqrt{1-x^2} dx;$ b) $I = \int_0^1 x^5 (x^2 + 1)^{2012} dx;$ c) $I = \int_0^1 \frac{x}{(x+1)^3} dx;$
 d) $I = \int_1^e \frac{1 + \ln^3 x}{x} dx;$ e) $I = \int_1^e \frac{2 \ln x + 1}{x(\ln x + 1)^2} dx;$ f) $I = \int_1^2 \frac{(2x-1)^{10}}{(x+1)^{12}} dx.$

Lời giải.

a) Ta có $I = \int_0^1 x^2 x \sqrt{1-x^2} dx.$

Đặt $u = \sqrt{1-x^2} \Leftrightarrow u^2 = 1-x^2 \Rightarrow u du = -x dx$. Đổi cận $x=0 \Rightarrow u=1$; $x=1 \Rightarrow u=0$, ta có :

$$I = \int_0^1 (1-u^2) u \cdot u du = \int_0^1 (u^2 - u^4) du = \left(\frac{u^3}{3} - \frac{u^5}{5} \right) \Big|_0^1 = \frac{2}{15}$$

b) Ta có $I = \int_0^1 x^4 x (x^2 + 1)^{2012} dx.$

Đặt $u = x^2 + 1 \Rightarrow du = 2x dx$. Đổi cận $x=0 \Rightarrow u=1$; $x=1 \Rightarrow u=2$, ta có :

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \int_1^2 (u-1)^2 u^{2012} du = \frac{1}{2} \int_1^2 (u^{2014} - 2u^{2013} + u^{2012}) du \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{u^{2015}}{2015} - \frac{2u^{2014}}{2014} + \frac{u^{2013}}{2013} \right) \Big|_1^2 = \frac{2025079.2^{2012} - 1}{4084588365} \end{aligned}$$

c) Đặt $u = x+1 \Rightarrow du = dx$. Đổi cận $x=0 \Rightarrow u=1$; $x=1 \Rightarrow u=2$, ta có :

$$I = \int_1^2 \frac{u-1}{u^3} du = \int_1^2 \left(\frac{1}{u^2} - \frac{1}{u^3} \right) du = \left(-\frac{1}{u} + \frac{1}{2u^2} \right) \Big|_1^2 = \frac{1}{8}$$

d) Đặt $u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx$. Đổi cận $x=1 \Rightarrow u=0$; $x=e \Rightarrow u=1$, ta có :

$$I = \int_0^1 (1+u^3) du = \left(u + \frac{u^4}{4} \right) \Big|_0^1 = \frac{5}{4}$$

e) Đặt $u = \ln x + 1 \Rightarrow du = \frac{1}{x}dx$. Đổi cận $x = 1 \Rightarrow u = 1$; $x = e \Rightarrow u = 2$, ta có :

$$I = \int_1^2 \frac{2(u-1)+1}{u^2} du = \int_1^2 \left(\frac{2}{u} - \frac{1}{u^2} \right) du = \left(2 \ln |u| + \frac{1}{u} \right) \Big|_1^2 = 2 \ln 2 - \frac{1}{2}$$

f) Ta có $I = \int_1^2 \left(\frac{2x-1}{x+1} \right)^{10} \cdot \frac{1}{(x+1)^2} dx$.

Đặt $u = \frac{2x-1}{x+1} \Rightarrow du = \frac{3}{(x+1)^2} dx$. Đổi cận $x = 1 \Rightarrow u = \frac{1}{2}$; $x = 2 \Rightarrow u = 1$, ta có :

$$I = \frac{1}{3} \int_{\frac{1}{2}}^1 u^{10} du = \frac{u^{11}}{33} \Big|_{\frac{1}{2}}^1 = \frac{2047}{67584}$$

5.16. Tính các tích phân sau :

- | | | |
|---|---|---|
| a) $I = \int_0^1 (x-1)e^x dx$; | b) $I = \int_0^1 (2x+1)e^{-2x} dx$; | c) $I = \int_0^{\ln 3} \frac{x e^x}{\sqrt{e^x + 1}} dx$; |
| d) $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x+1) \sin x dx$; | e) $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x(1+\cos 2x) dx$; | f) $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{1+\cos 2x} dx$; |
| g) $I = \int_1^e \frac{\ln x}{x^2} dx$; | h) $I = \int_1^e \frac{2x^2+3}{x} \ln x dx$; | i) $I = \int_1^2 \ln(x^2+2x) dx$. |

Lời giải.

a) Đặt $\begin{cases} u = x-1 \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = e^x \end{cases}$, ta có :

$$I = (x-1)e^x \Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx = 1 - e^x \Big|_0^1 = 2 - e$$

b) Đặt $\begin{cases} u = 2x+1 \\ dv = e^{-2x} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2dx \\ v = -\frac{1}{2}e^{-2x} \end{cases}$, ta có :

$$I = -\frac{1}{2} (2x+1)e^{-2x} \Big|_0^1 + \int_0^1 e^{-2x} dx = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}e^{-2} - \frac{1}{2} e^{-2x} \Big|_0^1 = 1 - 2e^{-2}$$

c) Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = \frac{e^x}{\sqrt{e^x+1}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = 2\sqrt{e^x+1} \end{cases}$, ta có :

$$I = 2x\sqrt{e^x+1} \Big|_0^{\ln 3} - 2 \int_0^{\ln 3} \sqrt{e^x+1} dx = 4\ln 3 - 2 \int_0^{\ln 3} \frac{e^x\sqrt{e^x+1}}{e^x} dx$$

Lại đặt $u = \sqrt{e^x+1} \Leftrightarrow u^2 = e^x+1 \Rightarrow 2udu = e^x dx$.

Đổi cận $x = 0 \Rightarrow u = \sqrt{2}$; $x = \ln 3 \Rightarrow u = 2$, ta có :

$$\begin{aligned} I &= 4 \ln 3 - 2 \int_{\sqrt{2}}^2 \frac{u}{u^2 - 1} 2u du = 4 \ln 3 - 4 \int_{\sqrt{2}}^2 \left(1 + \frac{1}{u^2 - 1}\right) du \\ &= 4 \ln 3 - 4t|_{\sqrt{2}}^2 - 2 \int_{\sqrt{2}}^2 \frac{(u+1)-(u-1)}{(u+1)(u-1)} du = 4 \ln 3 - 8 + 4\sqrt{2} - 2 \int_{\sqrt{2}}^2 \left(\frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1}\right) du \\ &= 4 \ln 3 - 8 + 4\sqrt{2} - 2 (\ln |u-1| - \ln |u+1|)|_{\sqrt{2}}^2 = 6 \ln 3 - 8 + 4\sqrt{2} + 4 \ln (\sqrt{2}-1) \end{aligned}$$

d) Đặt $\begin{cases} u = x+1 \\ dv = \sin x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -\cos x \end{cases}$, ta có :

$$I = -(x+1) \cos x|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = 1 + \sin x|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2$$

e) Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = (1 + \cos 2x) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = x + \frac{1}{2} \sin 2x \end{cases}$, ta có :

$$I = x \left(x + \frac{1}{2} \sin 2x\right)|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(x + \frac{1}{2} \sin 2x\right) dx = \frac{\pi^2}{4} - \left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{4} \cos 2x\right)|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{8} - \frac{1}{2}$$

f) Ta có $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{2\cos^2 x} dx$.

Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = \frac{1}{2\cos^2 x} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \frac{1}{2} \tan x \end{cases}$, ta có :

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} x \tan x|_0^{\frac{\pi}{4}} - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x} dx = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos x} d \cos x \\ &= \frac{\pi}{8} + \frac{1}{2} \ln |\cos x| |_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} \ln 2 \end{aligned}$$

g) Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = \frac{1}{x^2} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x} dx \\ v = -\frac{1}{x} \end{cases}$, ta có :

$$I = -\frac{\ln x}{x}|_1^e + \int_1^e \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{e} - \frac{1}{x}|_1^e = 1 - \frac{2}{e}$$

h) Ta có $I = \int_1^e \left(2x + \frac{3}{x}\right) \ln x dx = \int_1^e 2x \ln x dx + \int_1^e \frac{3}{x} \ln x dx = I_1 + I_2$.

Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = 2x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x} dx \\ v = x^2 \end{cases}$, ta có :

$$I_1 = x^2 \ln x|_1^e - \int_1^e x dx = e^2 - \frac{x^2}{2}|_1^e = \frac{e^2 + 1}{2}$$

Đặt $u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx$. Đổi cận $x = 1 \Rightarrow u = 0$; $x = e \Rightarrow u = 1$, ta có :

$$I_2 = \int_0^1 3u du = \frac{3u^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{3}{2}$$

Vậy $I_1 + I_2 = \frac{e^2}{2} + 2$.

i) Đặt $\begin{cases} u = \ln(x^2 + 2x) \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{2x+2}{x^2+2x} dx \\ v = x \end{cases}$, ta có :

$$I = x \ln(x^2 + 2x) \Big|_1^2 - \int_1^2 \frac{x(2x+2)}{x^2+2x} dx = 2 \ln 8 - \ln 3 - (2x - 2 \ln |x+2|) \Big|_1^2 = 10 \ln 2 - 3 \ln 3 - 2$$

5.17. Tính các tích phân sau :

$$\begin{array}{lll} \text{a) } I = \int_0^{\ln 2} x^2 e^x dx; & \text{b) } I = \int_0^{\ln 3} (x^2 - 2x) e^x dx; & \text{c) } I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x dx; \\ \text{d) } I = \int_1^e x \ln^2 x dx; & \text{e) } I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x dx; & \text{f) } I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \cos 3x dx. \end{array}$$

Lời giải.

a) Đặt $\begin{cases} u = x^2 \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2x dx \\ v = e^x \end{cases}$, ta có :

$$I = x^2 e^x \Big|_0^{\ln 2} - \int_0^{\ln 2} e^x 2x dx = 2 \ln^2 2 - \int_0^{\ln 2} 2x e^x dx$$

Lại đặt $\begin{cases} u = 2x \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2 dx \\ v = e^x \end{cases}$, ta có :

$$I = 2 \ln^2 2 - 2x e^x \Big|_0^{\ln 2} + \int_0^{\ln 2} 2e^x dx = 2 \ln^2 2 - 4 \ln 2 + 2e^x \Big|_0^{\ln 2} = 2 \ln^2 2 - 4 \ln 2 + 2$$

b) Đặt $\begin{cases} u = x^2 - 2x \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = (2x-2) dx \\ v = e^x \end{cases}$, ta có :

$$I = (x^2 - 2x) e^x \Big|_0^{\ln 3} - \int_0^{\ln 3} e^x (2x-2) dx = 3(\ln^2 3 - 2 \ln 3) - \int_0^{\ln 3} e^x (2x-2) dx$$

Lại đặt $\begin{cases} u = 2x-2 \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2 dx \\ v = e^x \end{cases}$, ta có :

$$\begin{aligned} I &= 3(\ln^2 3 - 2 \ln 3) - (2x-2) e^x \Big|_0^{\ln 3} + \int_0^{\ln 3} 2e^x dx \\ &= 3(\ln^2 3 - 2 \ln 3) - 3(2 \ln 3 - 2) - 2 + 2e^x \Big|_0^{\ln 3} \\ &= 3 \ln^2 3 - 12 \ln 3 + 8 \end{aligned}$$

c) Đặt $\begin{cases} u = x^2 \\ dv = \cos x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2x dx \\ v = \sin x \end{cases}$, ta có :

$$I = x^2 \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2x \sin x dx = \frac{\pi^2}{4} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2x \sin x dx$$

Lại đặt $\begin{cases} u = 2x \\ dv = \sin x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2 dx \\ v = -\cos x \end{cases}$, ta có :

$$I = \frac{\pi^2}{4} + 2x \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \cos x dx = \frac{\pi^2}{4} - 2 \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{4} - 2$$

d) Đặt $\begin{cases} u = \ln^2 x \\ dv = x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{2}{x} \ln x dx \\ v = \frac{x^2}{2} \end{cases}$, ta có :

$$I = \frac{x^2 \ln^2 x}{2} \Big|_1^e - \int_1^e x \ln x dx = \frac{e^2}{2} - \int_1^e x \ln x dx$$

Lại đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x} dx \\ v = \frac{x^2}{2} \end{cases}$, ta có :

$$I = \frac{e^2}{2} - \left(\frac{x^2 \ln x}{2} \Big|_1^e - \int_1^e \frac{x}{2} dx \right) = \frac{e^2}{2} - \left(\frac{e^2}{2} - \frac{x^2}{4} \Big|_1^e \right) = \frac{e^2 - 1}{4}$$

e) Đặt $\begin{cases} u = e^x \\ dv = \cos x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = e^x dx \\ v = \sin x \end{cases}$, ta có :

$$I = e^x \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x dx = e^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x dx$$

Lại đặt $\begin{cases} u = e^x \\ dv = \sin x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = e^x dx \\ v = -\cos x \end{cases}$, ta có :

$$I = e^{\frac{\pi}{2}} - \left(-e^x \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x dx \right) = e^{\frac{\pi}{2}} - 1 - I \Leftrightarrow I = \frac{e^{\frac{\pi}{2}} - 1}{2}$$

f) Đặt $\begin{cases} u = e^{2x} \\ dv = \cos 3x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2e^{2x} dx \\ v = \frac{1}{3} \sin 3x \end{cases}$, ta có :

$$I = \frac{1}{3} e^{2x} \sin 3x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{2}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \sin 3x dx = -\frac{1}{3} e^{\pi} - \frac{2}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \sin 3x dx$$

Lại đặt $\begin{cases} u = e^{2x} \\ dv = \sin 3x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2e^{2x} dx \\ v = -\frac{1}{3} \cos 3x \end{cases}$, ta có :

$$I = -\frac{1}{3} e^{\pi} - \frac{2}{3} \left(-\frac{1}{3} e^{2x} \cos 3x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{2}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \cos 3x dx \right) = -\frac{1}{3} e^{\pi} - \frac{2}{9} - \frac{4}{9} I \Leftrightarrow I = -\frac{3e^{\pi} + 2}{13}$$

5.18. Tính các tích phân sau :

$$\text{a) } I = \int_0^1 x^3 e^{x^2} dx;$$

$$\text{b) } I = \int_0^{\pi^2} \sqrt{x} \sin \sqrt{x} dx;$$

$$\text{c) } I = \int_1^{e^\pi} \cos(\ln x) dx;$$

$$\text{d) } I = \int_{e^2}^{e^5} \frac{\ln x \cdot \ln(\ln x)}{x} dx;$$

$$\text{e) } I = \int_1^2 (x+1) e^x \ln x dx;$$

$$\text{f) } I = \int_1^e \frac{(x - \ln x)(1 + \ln x)}{(1 + x \ln x)^2} dx.$$

Lời giải.

$$\text{a) Đặt } t = x^2 \Rightarrow dt = 2x dx. \text{ Đổi cận } x=0 \Rightarrow t=0; x=1 \Rightarrow t=1, \text{ ta có : } I = \frac{1}{2} \int_0^1 t e^t dt.$$

$$\text{Lại đặt } \begin{cases} u = t \\ dv = e^t dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dt \\ v = e^t \end{cases}, \text{ ta có :}$$

$$I = \frac{1}{2} \left(t e^t \Big|_0^1 - \int_0^1 e^t dt \right) = \frac{1}{2} (e - e^t \Big|_0^1) = \frac{1}{2}$$

$$\text{b) Đặt } t = \sqrt{x} \Leftrightarrow t^2 = x \Rightarrow 2t dt = dx. \text{ Đổi cận } x=0 \Rightarrow t=0; x=\pi^2 \Rightarrow t=\pi, \text{ ta có :}$$

$$I = \int_0^\pi t \sin t \cdot 2t dt = \int_0^\pi 2t^2 \sin t dt$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = 2t^2 \\ dv = \sin t dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 4t dt \\ v = -\cos t \end{cases}, \text{ ta có :}$$

$$I = -2t^2 \cos t \Big|_0^\pi + \int_0^\pi 4t \cos t dt = 2\pi^2 + \int_0^\pi 4t \cos t dt$$

$$\text{Lại đặt } \begin{cases} u = 4t \\ dv = \cos t dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 4dt \\ v = \sin t \end{cases}, \text{ ta có :}$$

$$I = 2\pi^2 + 4t \sin t \Big|_0^\pi - 4 \int_0^\pi \sin t dt = 2\pi^2 + 4 \cos t \Big|_0^\pi = 2\pi^2 - 8$$

$$\text{c) Đặt } \begin{cases} u = \cos(\ln x) \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -\frac{1}{x} \sin(\ln x) dx \\ v = x \end{cases}, \text{ ta có :}$$

$$I = x \cos(\ln x) \Big|_1^{e^\pi} + \int_1^{e^\pi} \sin(\ln x) dx = -e^\pi - 1 + \int_1^{e^\pi} \sin(\ln x) dx$$

$$\text{Lại đặt } \begin{cases} u = \sin(\ln x) \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x} \cos(\ln x) dx \\ v = x \end{cases}, \text{ ta có :}$$

$$I = -e^\pi - 1 + x \sin(\ln x) \Big|_1^{e^\pi} - \int_1^{e^\pi} \cos(\ln x) dx = -e^\pi - 1 - I \Leftrightarrow I = -\frac{e^\pi + 1}{2}$$

$$\text{d) Đặt } t = \ln x \Rightarrow dt = \frac{1}{x} dx. \text{ Đổi cận } x=e^2 \Rightarrow t=2; x=e^5 \Rightarrow t=5, \text{ ta có : } I = \int_2^5 t \ln t dt.$$

Đặt $\begin{cases} u = \ln t \\ dv = t dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{t} dt \\ v = \frac{t^2}{2} \end{cases}$, ta có :

$$\begin{aligned} I &= \frac{t^2}{2} \ln t \Big|_2^5 - \int_2^5 \frac{t^2}{2} \frac{1}{t} dt = \frac{25}{2} \ln 5 - 2 \ln 2 - \frac{1}{2} \int_2^5 t dt \\ &= \frac{25}{2} \ln 5 - 2 \ln 2 - \frac{1}{4} t^2 \Big|_2^5 = \frac{25}{2} \ln 5 - 2 \ln 2 - \frac{21}{4} \end{aligned}$$

e) Đặt $\begin{cases} u = (x+1) \ln x \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = (\ln x + \frac{1}{x} + 1) dx \\ v = e^x \end{cases}$, ta có :

$$I = (x+1) \ln x \cdot e^x \Big|_1^2 - \int_1^2 e^x \left(\ln x + \frac{1}{x} + 1 \right) dx = 3e^2 \ln 2 - \int_1^2 e^x (\ln x + 1) dx - \int_1^2 \frac{e^x}{x} dx$$

Lại đặt $\begin{cases} u = \ln x + 1 \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x} dx \\ v = e^x \end{cases}$, ta có :

$$I = 3e^2 \ln 2 - e^x (\ln x + 1) \Big|_1^2 + \int_1^2 \frac{e^x}{x} dx - \int_1^2 \frac{e^x}{x} dx = 2e^2 \ln 2 - e^2 + e$$

f) Đặt $\begin{cases} u = x - \ln x \\ dv = \frac{1+\ln x}{(1+x \ln x)^2} dx = \frac{1}{(1+x \ln x)^2} d(1+x \ln x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \left(1 - \frac{1}{x}\right) dx \\ v = -\frac{1}{1+x \ln x} \end{cases}$, ta có :

$$\begin{aligned} I &= -\frac{x - \ln x}{1 + x \ln x} \Big|_1^e + \int_1^e \frac{1 - \frac{1}{x}}{1 + x \ln x} dx = 1 - \frac{e-1}{e+1} + \int_1^e \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x} + \ln x} dx \\ &= \frac{2}{e+1} + \ln \left| \frac{1}{x} + \ln x \right| \Big|_1^e = \frac{1-e}{1+e} + \ln(1+e) \end{aligned}$$

§5. Tích Phân Của Các Hàm Số Thường Gặp

5.19. Tính các tích phân sau :

$$\begin{array}{lll} a) I = \int_{-2}^2 |x-1| dx; & b) I = \int_0^4 |3-x| dx; & c) I = \int_0^2 |x^2 - 3x + 2| dx; \\ d) I = \int_{-2}^3 (|x+1| + |x-2|) dx; & e) I = \int_{-2}^2 |2x - |x+1|| dx; & f) I = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos 2x} dx. \end{array}$$

Lời giải.

$$\begin{aligned} a) I &= \int_{-2}^1 |x-1| dx + \int_1^2 |x-1| dx = \int_{-2}^1 (1-x) dx + \int_1^2 (x-1) dx \\ &= \left(x - \frac{1}{2}x^2 \right) \Big|_{-2}^1 + \left(\frac{1}{2}x^2 - x \right) \Big|_1^2 = \frac{9}{2} + \frac{1}{2} = 5. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) I &= \int_0^3 |3-x| dx + \int_3^4 |3-x| dx = \int_0^3 (3-x) dx + \int_3^4 (-3+x) dx \\ &= \left(3x - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^3 + \left(-3x + \frac{x^2}{2} \right) \Big|_3^4 = \frac{9}{2} + \frac{1}{2} = 5. \end{aligned}$$

c) $I = \int_0^1 |x^2 - 3x + 2| dx + \int_1^2 |x^2 - 3x + 2| dx = \int_0^1 (x^2 - 3x + 2) dx + \int_1^2 (-x^2 + 3x - 2) dx$

 $= \left(\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 2x \right) \Big|_0^1 + \left(-\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} - 2x \right) \Big|_1^2 = \frac{5}{6} + \frac{1}{6} = 1.$

d) $I = \int_{-2}^3 |x+1| dx + \int_{-2}^3 |x-2| dx = \int_{-2}^{-1} |x+1| dx + \int_{-1}^3 |x+1| dx + \int_{-2}^2 |x-2| dx + \int_2^3 |x-2| dx$

 $= \int_{-2}^{-1} (-x-1) dx + \int_{-1}^3 (x+1) dx + \int_{-2}^2 (-x+2) dx + \int_2^3 (x-2) dx$
 $= \left(-\frac{x^2}{2} - x \right) \Big|_{-2}^{-1} + \left(\frac{x^2}{2} + x \right) \Big|_{-1}^3 + \left(-\frac{x^2}{2} + 2x \right) \Big|_{-2}^2 + \left(\frac{x^2}{2} - 2x \right) \Big|_2^3 = \frac{1}{2} + 8 + 8 + \frac{1}{2} = 17.$

e) $I = \int_{-2}^{-1} |2x+x+1| dx + \int_{-1}^2 |2x-x-1| dx = \int_{-2}^{-1} |3x+1| dx + \int_{-1}^1 |x-1| dx + \int_1^2 |x-1| dx$

 $= \int_{-2}^{-1} (-3x-1) dx + \int_{-1}^1 (1-x) dx + \int_1^2 (x-1) dx$
 $= \left(-\frac{3x^2}{2} - x \right) \Big|_{-2}^{-1} + \left(x - \frac{1}{2}x^2 \right) \Big|_{-1}^1 + \left(\frac{1}{2}x^2 - x \right) \Big|_1^2 = \frac{7}{2} + 2 + \frac{1}{2} = 6.$

f) $I = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} |\sin x| dx = \sqrt{2} \int_0^\pi |\sin x| dx + \sqrt{2} \int_\pi^{2\pi} |\sin x| dx = \sqrt{2} \int_0^\pi \sin x dx + \sqrt{2} \int_\pi^{2\pi} -\sin x dx$

 $= -\sqrt{2} \cos x \Big|_0^\pi + \sqrt{2} \cos x \Big|_\pi^{2\pi} = \sqrt{2} + \sqrt{2} + \sqrt{2} + \sqrt{2} = 4\sqrt{2}.$

5.20. Tính các tích phân sau :

a) $I = \int_3^5 \frac{1}{(x-2)(x+1)} dx;$	b) $I = \int_0^1 \frac{5x-13}{x^2-5x+6} dx;$	c) $I = \int_2^3 \frac{x^4}{x^2-1} dx;$
d) $I = \int_0^1 \frac{x(x-1)}{x^2-4} dx;$	e) $I = \int_0^1 \frac{3x-1}{x^2+6x+9} dx;$	f) $I = \int_0^1 \frac{1}{x^2+x+1} dx.$

Lời giải.

a) C1: (Phương pháp đồng nhất hệ số)

$\text{Ta có } \frac{1}{(x-2)(x+1)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+1} = \frac{A(x+1) + B(x-2)}{(x-2)(x+1)} = \frac{(A+B)x + A - 2B}{(x-2)(x+1)}.$

Đồng nhất hệ số được $\begin{cases} A+B=0 \\ A-2B=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=\frac{1}{3} \\ B=-\frac{1}{3} \end{cases}$. Khi đó

$I = \frac{1}{3} \int_3^5 \frac{1}{x-2} dx - \frac{1}{3} \int_3^5 \frac{1}{x+1} dx = \frac{1}{3} (\ln|x-2| - \ln|x+1|) \Big|_3^5 = \frac{1}{3} \ln 2$

C2: (Phương pháp trị số riêng)

$\text{Ta có } \frac{1}{(x-2)(x+1)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+1} = \frac{A(x+1) + B(x-2)}{(x-2)(x+1)} \Rightarrow 1 = A(x+1) + B(x-2).$

Cho $x=2$ được $A=\frac{1}{3}$; cho $x=-1$ được $B=-\frac{1}{3}$. Khi đó

$I = \frac{1}{3} \int_3^5 \frac{1}{x-2} dx - \frac{1}{3} \int_3^5 \frac{1}{x+1} dx = \frac{1}{3} (\ln|x-2| - \ln|x+1|) \Big|_3^5 = \frac{1}{3} \ln 2$

C3: (Kỹ thuật thêm bớt hay còn gọi là kỹ thuật nhảy tầng lầu)

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{3} \int_3^5 \frac{(x+1)-(x-2)}{(x-2)(x+1)} dx = \frac{1}{3} \int_3^5 \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+1} \right) dx \\ &= \frac{1}{3} (\ln|x-2| - \ln|x+1|) \Big|_3^5 = \frac{1}{3} \ln 2 \end{aligned}$$

b) Ta có $\frac{5x-13}{x^2-5x+6} = \frac{5x-13}{(x-3)(x-2)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x-2} = \frac{(A+B)x-2A-3B}{(x-3)(x-2)}$.

Đồng nhất hệ số được $\begin{cases} A+B=5 \\ -2A-3B=-13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=2 \\ B=3 \end{cases}$. Khi đó

$$I = 2 \int_0^1 \frac{1}{x-3} dx + 3 \int_0^1 \frac{1}{x-2} dx = 2 \ln|x-3|_0^1 + 3 \ln|x-2|_0^1 = -\ln 18$$

c) Ta có $I = \int_2^3 \left(x^2 + 1 + \frac{1}{x^2-1} \right) dx = \left(\frac{x^3}{3} + x \right) \Big|_2^3 + \int_2^3 \frac{1}{x^2-1} dx = \frac{22}{3} + \int_2^3 \frac{1}{x^2-1} dx$.

Lại có $\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} = \frac{(A+B)x+A-B}{(x-1)(x+1)}$.

Đồng nhất hệ số được $\begin{cases} A+B=0 \\ A-B=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=\frac{1}{2} \\ B=-\frac{1}{2} \end{cases}$. Khi đó

$$I = \frac{22}{3} + \frac{1}{2} \int_2^3 \frac{1}{x-1} dx - \frac{1}{2} \int_2^3 \frac{1}{x+1} dx = \frac{22}{3} + \frac{1}{2} (\ln|x-1| - \ln|x+1|) \Big|_2^3 = \frac{22}{3} + \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2}$$

d) Ta có $I = \int_0^1 \frac{x^2-x}{x^2-4} dx = \int_0^1 \left(1 + \frac{-x+4}{x^2-4} \right) dx = x|_0^1 + \int_0^1 \frac{-x+4}{x^2-4} dx = 1 + \int_0^1 \frac{-x+4}{x^2-4} dx$.

Lại có $\frac{-x+4}{x^2-4} = \frac{-x+4}{(x-2)(x+2)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2} = \frac{(A+B)x+2A-2B}{x^2-4}$.

Đồng nhất hệ số được $\begin{cases} A+B=-1 \\ 2A-2B=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=\frac{1}{2} \\ B=-\frac{3}{2} \end{cases}$. Khi đó

$$I = 1 + \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{x-2} dx - \frac{3}{2} \int_0^1 \frac{1}{x+2} dx = 1 + \frac{1}{2} \ln|x-2|_0^1 - \frac{3}{2} \ln|x+2|_0^1 = 1 + \ln 2 - \frac{3}{2} \ln 3$$

e) Ta có $\frac{3x-1}{x^2+6x+9} = \frac{3x-1}{(x+3)^2} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{(x+3)^2} = \frac{A(x+3)+B}{(x+3)^2} = \frac{Ax+3A+B}{(x+3)^2}$.

Đồng nhất hệ số được $\begin{cases} A=3 \\ 3A+B=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=3 \\ B=-10 \end{cases}$. Khi đó

$$I = 3 \int_0^1 \frac{1}{x+3} dx - 10 \int_0^1 \frac{1}{(x+3)^2} dx = 3 \ln|x+3|_0^1 + \left. \frac{10}{x+3} \right|_0^1 = 3 \ln \frac{4}{3} - \frac{5}{6}$$

f) Ta có $I = \int_0^1 \frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} dx$.

Đặt $x + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \tan t$, $t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow dx = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{1}{\cos^2 t} dt = \frac{\sqrt{3}}{2} (1 + \tan^2 t) dt$.

Đổi cận $x = 0 \Rightarrow t = \frac{\pi}{6}$; $x = 1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{3}$, ta có :

$$I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\frac{3}{4}\tan^2 t + \frac{3}{4}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} (1 + \tan^2 t) dt = \frac{2}{\sqrt{3}} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} dt = \frac{2}{\sqrt{3}} t \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

5.21. Tính các tích phân sau :

$$\begin{array}{lll} \text{a)} I = \int_0^1 \frac{4x - 2}{(x+2)(x^2+1)} dx; & \text{b)} I = \int_1^2 \frac{x^2 - 3x + 2}{x(x^2 + 2x + 1)} dx; & \text{c)} I = \int_{-1}^3 \frac{x^2 - x + 3}{x^3 - 3x + 2} dx; \\ \text{d)} I = \int_1^2 \frac{1 - x^4}{x + x^5} dx; & \text{e)} I = \int_0^1 \frac{x^2 + x + 2}{x^3 + x^2 + x + 1} dx; & \text{f)} I = \int_{-1}^0 \frac{1}{(x^2 - 3x + 2)^2} dx. \end{array}$$

Lời giải.

$$\begin{aligned} \text{a)} \text{Ta có } \frac{4x - 2}{(x+2)(x^2+1)} &= \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x^2+1} + \frac{2Cx}{x^2+1} = \frac{A(x^2+1) + B(x+2) + 2Cx(x+2)}{(x+2)(x^2+1)} \\ &= \frac{(A+2C)x^2 + (B+4C)x + A+2B}{(x+2)(x^2+1)}. \end{aligned}$$

$$\text{Đồng nhất hệ số được } \begin{cases} A+2C=0 \\ B+4C=4 \\ A+2B=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=-2 \\ B=0 \\ C=1 \end{cases}. \text{ Khi đó}$$

$$I = -2 \int_0^1 \frac{1}{x+2} dx + \int_0^1 \frac{2x}{x^2+1} dx = (-2 \ln|x+2| + \ln|x^2+1|) \Big|_0^1 = \ln \frac{8}{9}$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \text{Ta có } \frac{x^2 - 3x + 2}{x(x^2 + 2x + 1)} &= \frac{x^2 - 3x + 2}{x(x+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2} \\ &= \frac{A(x+1)^2 + Bx(x+1) + Cx}{x(x+1)^2} = \frac{(A+B)x^2 + (2A+B+C)x + A}{x(x+1)^2}. \end{aligned}$$

$$\text{Đồng nhất hệ số được } \begin{cases} A+B=1 \\ 2A+B+C=-3 \\ A=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=2 \\ B=-1 \\ C=-6 \end{cases}. \text{ Khi đó}$$

$$I = 2 \int_1^2 \frac{1}{x} dx - \int_1^2 \frac{1}{x+1} dx - 6 \int_1^2 \frac{1}{(x+1)^2} dx = \left(2 \ln|x| - \ln|x+1| + \frac{6}{x+1} \right) \Big|_1^2 = \ln \frac{8}{3} - 1$$

$$\begin{aligned} \text{c)} \text{Ta có } \frac{3x^2 + 3x + 3}{x^3 - 3x + 2} &= \frac{3x^2 + 3x + 3}{(x-1)^2(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+2} \\ &= \frac{A(x-1)(x+2) + B(x+2) + C(x-1)^2}{(x-1)^2(x+2)} = \frac{(A+C)x^2 + (A+B-2C)x - 2A + 2B + C}{(x-1)^2(x+2)} \end{aligned}$$

$$\text{Đồng nhất hệ số được } \begin{cases} A+C=3 \\ A+B-2C=3 \\ -2A+2B+C=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=2 \\ B=3 \\ C=1 \end{cases}. \text{ Khi đó}$$

$$I = \int_{-1}^0 \frac{2}{x-1} dx + \int_{-1}^0 \frac{3}{(x-1)^2} dx + \int_{-1}^0 \frac{1}{x+2} dx = 2 \ln|x-1| \Big|_{-1}^0 - \frac{3}{x-1} \Big|_{-1}^0 + \ln|x+2| \Big|_{-1}^0 = \frac{3}{2} - \ln 2$$

$$\text{d)} I = \int_1^2 \frac{1-x^4}{x(1+x^4)} dx = \int_1^2 \frac{1+x^4-2x^4}{x(1+x^4)} dx = \int_1^2 \frac{1}{x} dx - 2 \int_1^2 \frac{x^3}{1+x^4} dx$$

$$= \left(\ln|x| - \frac{1}{2} \ln|1+x^4| \right) \Big|_1^2 = \frac{1}{2} \ln \frac{8}{17}.$$

$$\begin{aligned} \text{e) Ta có } I &= \int_0^1 \frac{x^2 + x + 2}{x^3 + x^2 + x + 1} dx = \int_0^1 \frac{x^2 + x + 2}{x^2(x+1) + x + 1} dx = \int_0^1 \frac{x^2 + 1 + x + 1}{(x+1)(x^2 + 1)} dx \\ &= \int_0^1 \left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x^2+1} \right) dx = \ln|x+1| \Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{1}{x^2+1} dx = \ln 2 + \int_0^1 \frac{1}{x^2+1} dx. \end{aligned}$$

Đặt $x = \tan t, t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow dx = \frac{1}{\cos^2 t} dt = (1 + \tan^2 t) dt$.

Đổi cận $x = 0 \Rightarrow t = 0; x = 1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{4}$, ta có :

$$I = \ln 2 + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\tan^2 t + 1} (1 + \tan^2 t) dt = \ln 2 + \int_0^{\frac{\pi}{4}} dt = \ln 2 + t \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \ln 2 + \frac{\pi}{4}$$

$$\begin{aligned} \text{f) } I &= \int_0^1 \frac{1}{(x^2 + 3x + 2)^2} dx = \int_0^1 \left[\frac{(x+2) - (x+1)}{(x+1)(x+2)} \right]^2 dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} \right)^2 dx \\ &= \int_0^1 \left[\frac{1}{(x+2)^2} + \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{2}{(x+1)(x+2)} \right] dx = -\frac{1}{x+1} \Big|_0^1 - \frac{1}{x+2} \Big|_0^1 - 2 \int_0^1 \frac{(x+2) - (x+1)}{(x+1)(x+2)} dx \\ &= \frac{2}{3} - 2 \left(\int_0^1 \frac{1}{x+1} dx - \int_0^1 \frac{1}{x+2} dx \right) = \frac{2}{3} - 2 (\ln|x+1| - \ln|x+2|) \Big|_0^1 = \frac{2}{3} + 2 \ln \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

5.22. Tính các tích phân sau :

$$\begin{array}{lll} \text{a) } I = \int_1^3 \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} dx; & \text{b) } I = \int_2^3 \frac{1}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}} dx; & \text{c) } I = \int_0^1 \sqrt{2x-x^2} dx; \\ \text{d) } I = \int_3^6 \frac{1}{\sqrt{6x-x^2}} dx; & \text{e) } I = \int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{2+x}{2-x}} dx; & \text{f) } I = \int_{-2}^{-1} \frac{x+4}{\sqrt{x^2+4x+5}} dx. \end{array}$$

Lời giải.

$$\text{a) } I = \int_1^3 (\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) dx = \int_1^3 ((x+1)^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}}) dx = \left(\frac{2(x+1)^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} \right) \Big|_1^3 = \frac{16 - 4\sqrt{2} - 6\sqrt{3}}{3}.$$

$$\begin{aligned} \text{b) } I &= \int_2^3 (\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}) dx = \int_2^3 ((x+1)^{\frac{1}{2}} + (x-1)^{\frac{1}{2}}) dx \\ &= \frac{2}{3} \left((x+1)^{\frac{3}{2}} + (x-1)^{\frac{3}{2}} \right) \Big|_2^3 = \frac{7 - 3\sqrt{3} + 2\sqrt{2}}{3}. \end{aligned}$$

$$\text{c) Ta có } I = \int_0^1 \sqrt{1 - (x-1)^2} dx.$$

Đặt $x-1 = \sin t, t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow dx = \cos dt$.

Đổi cận $x = 0 \Rightarrow t = -\frac{\pi}{2}; x = 1 \Rightarrow t = 0$, ta có :

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \sqrt{1 - \sin^2 t} \cos t dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \cos^2 t dt = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 (1 + \cos 2t) dt = \left(\frac{1}{2}t + \frac{1}{4} \sin 2t \right) \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^0 = \frac{\pi}{4}$$

d) Ta có $I = \int_3^6 \frac{1}{\sqrt{9 - (x-3)^2}} dx.$

Đặt $x-3 = 3 \sin t, t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow dx = 3 \cos t dt.$

Đổi cận $x=3 \Rightarrow t=0; x=6 \Rightarrow t=\frac{\pi}{2}$, ta có :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{9 - 9\sin^2 t}} 3 \cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dt = t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}$$

e) Ta có $I = \int_0^{\sqrt{2}} \frac{2+x}{\sqrt{4-x^2}} dx.$

Đặt $x = 2 \sin t, t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow dx = 2 \cos t dt.$

Đổi cận $x=0 \Rightarrow t=0; x=\sqrt{2} \Rightarrow t=\frac{\pi}{4}$, ta có :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2+2\sin t}{\sqrt{4-4\sin^2 t}} 2 \cos t dt = 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1+\sin t) dt = (2t - 2\cos t) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = 2 - \sqrt{2} + \frac{1}{2}\pi$$

f) Ta có $I = \int_{-2}^{-1} \frac{x+4}{\sqrt{(x+2)^2+1}} dx.$

Đặt $x+2 = \tan t, t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow dx = \frac{1}{\cos^2 t} dt = (1+\tan^2 t) dt.$

Đổi cận $x=-2 \Rightarrow t=0; x=-1 \Rightarrow t=\frac{\pi}{4}$, ta có :

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan t + 2}{\sqrt{\tan^2 t + 1}} \cdot \frac{1}{\cos^2 t} dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{\sin t}{\cos^2 t} + \frac{2}{\cos t} \right) dt \\ &= - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 t} d(\cos t) + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 - \sin t + 1 + \sin t}{1 - \sin^2 t} d(\sin t) \\ &= - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 t} d(\cos t) + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{1 + \sin t} + \frac{1}{1 - \sin t} \right) d(\sin t) \\ &= \frac{1}{\cos t} \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + \ln \left(\frac{1 + \sin t}{1 - \sin t} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2} - 1 + 2 \ln (\sqrt{2} + 1) \end{aligned}$$

5.23. Tính các tích phân sau :

$$\begin{array}{lll} \text{a)} I = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(x+1)(x+8)}} dx; & \text{b)} I = \int_0^3 \frac{2x+3}{\sqrt{x+1}+1} dx; & \text{c)} I = \int_1^{64} \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}} dx; \\ \text{d)} I = \int_{\sqrt{2}}^2 \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx; & \text{e)} I = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{x\sqrt{4-x^2}} dx; & \text{f)} I = \int_2^6 \frac{1}{2x+1+\sqrt{4x+1}} dx. \end{array}$$

Lời giải.

a) Đặt $u = \sqrt{x+1} + \sqrt{x+8}$
 $\Rightarrow du = \left(\frac{1}{2\sqrt{x+1}} + \frac{1}{2\sqrt{x+8}} \right) dx = \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x+8}}{2\sqrt{(x+1)(x+8)}} dx \Leftrightarrow \frac{2}{u} du = \frac{1}{\sqrt{(x+1)(x+8)}} dx.$

Đổi cận $x = 0 \Rightarrow u = 1 + 2\sqrt{2}$; $x = 1 \Rightarrow u = 3 + \sqrt{2}$, ta có :

$$I = \int_{1+2\sqrt{2}}^{3+\sqrt{2}} \frac{2}{u} du = 2 \ln |u| \Big|_{1+2\sqrt{2}}^{3+\sqrt{2}} = 2 \ln \frac{3+\sqrt{2}}{1+2\sqrt{2}}$$

b) Đặt $u = \sqrt{x+1} \Leftrightarrow u^2 = x+1 \Rightarrow 2udu = dx$.

Đổi cận $x = 0 \Rightarrow u = 1$; $x = 1 \Rightarrow u = 2$, ta có :

$$\begin{aligned} I &= \int_1^2 \frac{2u^2 + 1}{u+1} 2udu = \int_1^2 \left(4u^2 - 4u + 6 - \frac{6}{u+1} \right) du \\ &= \left(\frac{4u^3}{3} - 2u^2 + 6u - 6 \ln |u+1| \right) \Big|_1^2 = \frac{28}{3} - 6 \ln \frac{3}{2} \end{aligned}$$

c) Đặt $u = \sqrt[6]{x} \Leftrightarrow u^6 = x \Rightarrow 6u^5 du = dx$. Đổi cận $x = 1 \Rightarrow u = 1$; $x = 64 \Rightarrow u = 2$, ta có :

$$\begin{aligned} I &= \int_1^2 \frac{1}{u^3 + u^2} 6u^5 du = 6 \int_1^2 \frac{u^3}{u+1} du = 6 \int_1^2 \left(u^2 - u + 1 - \frac{1}{u+1} \right) du \\ &= 6 \left(\frac{u^3}{3} - \frac{u^2}{2} + u - \ln |u+1| \right) \Big|_1^2 = 11 + 6 \ln \frac{2}{3} \end{aligned}$$

d) Ta có $I = \int_{\sqrt{2}}^2 \frac{1}{x^2 \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}} dx$.

Đặt $u = \frac{1}{x} \Rightarrow du = -\frac{1}{x^2} dx$. Đổi cận $x = \sqrt{2} \Rightarrow u = \frac{1}{\sqrt{2}}$; $x = 2 \Rightarrow u = \frac{1}{2}$, ta có :

$$I = - \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} du = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} du$$

Lại đặt $u = \sin t$, $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow du = \cos t dt$. Đổi cận $u = \frac{1}{2} \Rightarrow t = \frac{\pi}{6}$; $u = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow t = \frac{\pi}{4}$, ta có :

$$I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 t}} \cos t dt = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} 1 dt = t \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{12}$$

e) Ta có $I = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{x}{x^2 \sqrt{4-x^2}} dx$.

Đặt $u = \sqrt{4-x^2} \Leftrightarrow u^2 = 4-x^2 \Rightarrow 2udu = -2xdx$. Đổi cận $x = 1 \Rightarrow u = \sqrt{3}$; $x = \sqrt{3} \Rightarrow u = 1$, ta có :

$$\begin{aligned} I &= \int_1^{\sqrt{3}} \frac{u}{u(4-u^2)} du = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{(2-u)(2+u)} du = \frac{1}{4} \int_1^{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{2+u} + \frac{1}{2-u} \right) du \\ &= \frac{1}{4} \ln \left| \frac{2+u}{2-u} \right| \Big|_1^{\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \ln \frac{2+\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

f) Đặt $u = \sqrt{4x+1} \Leftrightarrow u^2 = 4x+1 \Rightarrow u du = 2dx$. Đổi cận $x=2 \Rightarrow u=3$; $x=6 \Rightarrow u=5$, ta có :

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \int_3^5 \frac{1}{\frac{u^2-1}{2} + 1 + u} u du = \int_3^5 \frac{u}{u^2 + 2u + 1} du = \int_3^5 \frac{u+1-1}{(u+1)^2} du \\ &= \int_3^5 \left(\frac{1}{u+1} - \frac{1}{(u+1)^2} \right) du = \left(\ln|u+1| + \frac{1}{u+1} \right) \Big|_3^5 = \ln \frac{3}{2} - \frac{1}{12} \end{aligned}$$

5.24. Tính các tích phân sau :

$$\begin{array}{lll} \text{a)} I = \int_0^{\ln 2} \frac{1}{e^x + 1} dx; & \text{b)} I = \int_0^{\ln 2} \frac{1}{1 + e^{-x}} dx; & \text{c)} I = \int_{\ln 2}^{\ln 5} \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x - 1}} dx; \\ \text{d)} I = \int_{\ln 2}^{\ln 5} \frac{e^x}{(10 - e^x) \sqrt{e^x - 1}} dx; & \text{e)} I = \int_1^2 \frac{x+1}{x(1+x e^x)} dx; & \text{f)} I = \int_0^1 \frac{(x+2)\sqrt{e^x}}{x^2 e^x - 9} dx. \end{array}$$

Lời giải.

$$\begin{array}{l} \text{a)} I = \int_0^{\ln 2} \frac{e^x + 1 - e^x}{e^x + 1} dx = \int_0^{\ln 2} \left(1 - \frac{e^x}{e^x + 1} \right) dx = (x - \ln|e^x + 1|) \Big|_0^{\ln 2} = \ln \frac{4}{3}. \\ \text{b)} I = \int_0^{\ln 2} \frac{1}{1 + \frac{1}{e^x}} dx = \int_0^{\ln 2} \frac{e^x}{1 + e^x} dx = \int_0^{\ln 2} \frac{1}{1 + e^x} de^x = \ln|1 + e^x| \Big|_0^{\ln 2} = \ln \frac{3}{2}. \\ \text{c)} \text{Ta có } I = \int_{\ln 2}^{\ln 5} \frac{e^x \cdot e^x}{\sqrt{e^x - 1}} dx. \end{array}$$

Đặt $u = \sqrt{e^x - 1} \Leftrightarrow u^2 = e^x - 1 \Rightarrow 2udu = e^x dx$. Đổi cận $x = \ln 2 \Rightarrow u = 1$; $x = \ln 5 \Rightarrow u = 4$, ta có :

$$I = \int_1^4 \frac{u^2 + 1}{u} 2udu = 2 \int_1^4 (u^2 + 1) du = 2 \left(\frac{u^3}{3} + u \right) \Big|_1^4 = \frac{20}{3}$$

d) Đặt $u = \sqrt{e^x - 1} \Leftrightarrow u^2 = e^x - 1 \Rightarrow 2udu = e^x dx$.

Đổi cận $x = \ln 2 \Rightarrow u = 1$; $x = \ln 5 \Rightarrow u = 2$, ta có :

$$\begin{aligned} I &= \int_1^2 \frac{1}{(9-u)u} 2udu = \frac{1}{3} \int_1^2 \frac{(3+u)+(3-u)}{(3+u)(3-u)} du = \frac{1}{3} \int_1^2 \left(\frac{1}{3-u} + \frac{1}{3+u} \right) du \\ &= \frac{1}{3} (\ln|3+u| - \ln|3-u|) \Big|_1^2 = \frac{1}{3} \ln \frac{5}{2} \end{aligned}$$

$$\text{e)} \text{Ta có } I = \int_1^2 \frac{(x+1)e^x}{xe^x(1+x e^x)} dx.$$

Đặt $u = 1 + xe^x \Rightarrow du = (1+x)e^x dx$. Đổi cận $x=1 \Rightarrow u=1+e$; $x=2 \Rightarrow u=1+2e^2$, ta có :

$$I = \int_{1+e}^{1+2e^2} \frac{1}{u(u-1)} du = \int_{1+e}^{1+2e^2} \left(\frac{1}{u-1} - \frac{1}{u} \right) du = \ln \left| \frac{u-1}{u} \right| \Big|_{1+e}^{1+2e^2} = \ln \frac{2e(1+e)}{1+2e^2}$$

f) Đặt $u = x\sqrt{e^x} \Rightarrow du = \frac{1}{2}(x+2)\sqrt{e^x} dx$. Đổi cận $x=0 \Rightarrow u=0$; $x=1 \Rightarrow u=\sqrt{e}$, ta có :

$$I = \int_0^{\sqrt{e}} \frac{2}{u^2 - 9} du = \frac{1}{3} \int_0^{\sqrt{e}} \left(\frac{1}{u-3} - \frac{1}{u+3} \right) du = \frac{1}{3} \ln \left| \frac{u-3}{u+3} \right| \Big|_0^{\sqrt{e}} = \frac{1}{3} \ln \frac{3-\sqrt{e}}{3+\sqrt{e}}$$

5.25. Tính các tích phân sau :

$$\begin{array}{lll} \text{a)} I = \int_1^e \frac{\ln^2 x - 3 \ln x + 3}{x(\ln x - 2)} dx; & \text{b)} I = \int_1^{e^3} \frac{\sqrt{\ln x + 1} \cdot \ln x}{x} dx; & \text{c)} I = \int_1^{\sqrt{e}} \frac{1}{x(\ln^2 x - 3 \ln x + 2)} dx; \\ \text{d)} I = \int_1^e \frac{1-x}{(1+x \ln x)^2} dx; & \text{e)} I = \int_1^2 \frac{x e^x + 1}{x(e^x + \ln x)} dx; & \text{f)} I = \int_1^e \frac{1-x(e^x - 1)}{x(1+x e^x \ln x)} dx. \end{array}$$

Lời giải.

a) Đặt $u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx$. Đổi cận $x = 1 \Rightarrow u = 0$; $x = e \Rightarrow u = 1$, ta có :

$$I = \int_0^1 \frac{u^2 - 3u + 3}{u-2} du = \int_0^1 \left(u - 1 + \frac{1}{u-2} \right) du = \left(\frac{u^2}{2} - u + \ln|u-2| \right) \Big|_0^1 = -\frac{1}{2} - \ln 2$$

b) Đặt $u = \sqrt{\ln x + 1} \Rightarrow u^2 = \ln x + 1 \Rightarrow 2udu = \frac{1}{x} dx$.

Đổi cận $x = 1 \Rightarrow u = 1$; $x = e^3 \Rightarrow u = 2$, ta có :

$$I = \int_1^2 u(u^2 - 1) 2udu = \int_1^2 (2u^4 - 2u^2) du = \left(\frac{2u^5}{5} - \frac{2u^3}{3} \right) \Big|_1^2 = \frac{116}{15}$$

c) Đặt $u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx$. Đổi cận $x = 1 \Rightarrow u = 0$; $x = \sqrt{e} \Rightarrow u = \frac{1}{2}$, ta có :

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{u^2 - 3u + 2} du = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{(u-1)-(u-2)}{(u-1)(u-2)} du = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{u-2} - \frac{1}{u-1} \right) du \\ &= (\ln|u-2| - \ln|u-1|) \Big|_0^{\frac{1}{2}} = \ln \frac{3}{2} \end{aligned}$$

d) Ta có $I = \int_1^e \frac{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}}{\left(\frac{1}{x} + \ln x\right)^2} dx$.

Đặt $u = \frac{1}{x} + \ln x \Rightarrow du = \left(-\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}\right) dx$. Đổi cận $x = 1 \Rightarrow u = 1$; $x = e \Rightarrow u = \frac{1}{e} + 1$, ta có :

$$I = - \int_1^{1+\frac{1}{e}} \frac{1}{u^2} du = \frac{1}{u} \Big|_1^{1+\frac{1}{e}} = -\frac{1}{1+e}$$

e) Đặt $u = e^x + \ln x \Rightarrow du = \left(e^x + \frac{1}{x}\right) dx$. Đổi cận $x = 1 \Rightarrow u = e$; $x = 2 \Rightarrow u = e^2 + \ln 2$, ta có :

$$I = \int_e^{e^2+\ln 2} \frac{1}{u} du = \ln|u| \Big|_e^{e^2+\ln 2} = \ln \frac{e^2 + \ln 2}{e}$$

f) Ta có

$$\begin{aligned} I &= \int_1^e \frac{1-x(e^x - 1)}{x(1+x e^x \ln x)} dx = \int_1^e \frac{x+1-x e^x}{x^2 \left(\frac{1}{x} + e^x \ln x\right)} dx = \int_1^e \frac{\frac{1}{x} + e^x \ln x + \frac{1}{x^2} - e^x \ln x - \frac{e^x}{x}}{\frac{1}{x} + e^x \ln x} dx \\ &= \int_1^e \left(1 + \frac{\frac{1}{x^2} - e^x \ln x - \frac{e^x}{x}}{\frac{1}{x} + e^x \ln x} \right) dx = x \Big|_1^e - \int_1^e \frac{1}{\frac{1}{x} + e^x \ln x} d \left(\frac{1}{x} + e^x \ln x \right) \\ &= e - 1 - \ln \left| \frac{1}{x} + e^x \ln x \right| \Big|_1^e = e - 1 - \ln \left(\frac{1}{e} + e^e \right) \end{aligned}$$

5.26. Tính các tích phân sau :

$$\text{a) } I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x dx;$$

$$\text{b) } I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^4 x dx;$$

$$\text{c) } I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x dx;$$

$$\text{d) } I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x dx;$$

$$\text{e) } I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x} dx;$$

$$\text{f) } I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^4 x} dx;$$

$$\text{g) } I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\cos x} dx;$$

$$\text{h) } I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos x \sin^2 x} dx;$$

$$\text{i) } I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^3 x} dx.$$

Lời giải.

$$\text{a) } I = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 - \cos 2x) dx = \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \sin 2x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}.$$

$$\text{b) } I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos^2 x)^2 dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1 + \cos 2x}{2} \right)^2 dx = \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + 2 \cos 2x + \cos^2 2x) dx$$

$$= \frac{1}{8} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (3 + 4 \cos 2x + \cos 4x) dx = \frac{1}{8} \left(3x + 2 \sin 2x + \frac{1}{4} \sin 4x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{3\pi + 8}{32}.$$

$$\text{c) } I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \sin x dx = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2 x) d(\cos x) = \left(\frac{\cos^3 x}{3} - \cos x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3}.$$

$$\text{d) } I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x \cos x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 x)^2 d(\sin x) = \left(\sin x - \frac{2 \sin^3 x}{3} + \frac{\sin^5 x}{5} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{6}{15}.$$

$$\begin{aligned} \text{e) } I &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^6 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos^6 x} - \frac{1}{\cos^4 x} \right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^4 x} \frac{1}{\cos^2 x} dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x} \frac{1}{\cos^2 x} dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \tan^2 x)^2 d(\tan x) - \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \tan^2 x) d(\tan x) \\ &= \left(\tan x + \frac{2 \tan^3 x}{3} + \frac{\tan^5 x}{5} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \left(\tan x + \frac{\tan^3 x}{3} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{8}{15}. \end{aligned}$$

$$\text{f) } I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x} \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \tan^2 x) d(\tan x) = \left(\tan x + \frac{\tan^3 x}{3} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{4}{3}.$$

$$\begin{aligned} \text{g) } I &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{2}{1 - \tan^2 \frac{x}{2}} d\left(\tan \frac{x}{2}\right) = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \left(\frac{1}{1 + \tan \frac{x}{2}} + \frac{1}{1 - \tan \frac{x}{2}} \right) d\left(\tan \frac{x}{2}\right) \\ &= \ln \left| \frac{1 + \tan \frac{x}{2}}{1 - \tan \frac{x}{2}} \right| \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{2} \ln 3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{h) } I &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x}{\cos^2 x \sin^2 x} dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{(1 - \sin^2 x) \sin^2 x} d(\sin x) = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1 - \sin^2 x + \sin^2 x}{(1 - \sin^2 x) \sin^2 x} d(\sin x) \\ &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{1 - \sin^2 x} \right) d(\sin x) = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\sin^2 x} d(\sin x) + \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1 - \sin x + 1 + \sin x}{(1 - \sin x)(1 + \sin x)} d(\sin x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{1}{\sin x} \left| \frac{\pi}{6} + \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{1}{1+\sin x} + \frac{1}{1-\sin x} \right) d(\sin x) \right. \\
 &= 2 - \frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2} (\ln |1+\sin x| - \ln |1-\sin x|) \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = 2 - \frac{2}{\sqrt{3}} + \ln \left(1 + \frac{2}{\sqrt{3}} \right). \\
 \text{i)} \quad I &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos x}{\cos^4 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{(1-\sin^2 x)^2} d(\sin x) = \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \left[\frac{1+\sin x + 1-\sin x}{(1+\sin x)(1-\sin x)} \right]^2 d(\sin x) \\
 &= \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \left[\frac{1}{1-\sin x} + \frac{1}{1+\sin x} \right]^2 d(\sin x) \\
 &= \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \left[\frac{1}{(1-\sin x)^2} + \frac{1}{(1+\sin x)^2} + \frac{2}{(1-\sin x)(1+\sin x)} \right]^2 d(\sin x) \\
 &= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{1-\sin x} - \frac{1}{1+\sin x} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} + \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1-\sin x + 1+\sin x}{(1-\sin x)(1+\sin x)} d(\sin x) \\
 &= \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \left(\frac{1}{1+\sin x} + \frac{1}{1-\sin x} \right) d(\sin x) \\
 &= \frac{1}{3} + \frac{1}{4} (\ln |1+\sin x| - \ln |1-\sin x|) \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \ln 3.
 \end{aligned}$$

5.27. Tính các tích phân sau :

$$\begin{array}{lll}
 \text{a)} \quad I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2 \cos^2 x - 1}{1 + \sin 2x} dx; & \text{b)} \quad I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{7 + \cos 2x}} dx; & \text{c)} \quad I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x (\frac{1}{\cos^2 x} + 2 \tan x)} dx; \\
 \text{d)} \quad I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{3 \sin^2 x + \cos^2 x} dx; & \text{e)} \quad I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\cos x \cos(x + \frac{\pi}{4})} dx; & \text{f)} \quad I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{5 \sin x \cos^2 x + 2 \cos x} dx; \\
 \text{g)} \quad I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + \sin x} dx; & \text{h)} \quad I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + \sin x + \cos x} dx; & \text{i)} \quad I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin x}{\sin x + \sqrt{3} \cos x} dx.
 \end{array}$$

Lời giải.

$$\text{a)} \quad I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{1 + \sin 2x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1 + \sin 2x} d(\sin 2x) = \ln |1 + \sin 2x| \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \ln 2.$$

$$\text{b)} \quad \text{Ta có } I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{8 - 2\sin^2 x}} dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{4 - \sin^2 x}} dx.$$

Đặt $\sin x = 2 \sin t, t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \cos x dx = 2 \cos t dt.$

Đổi cận $x = 0 \Rightarrow t = 0; x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = \frac{\pi}{6}$, ta có :

$$I = \frac{\sqrt{2}}{2} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\sqrt{4 - 4\sin^2 t}} \cos t dt = \frac{\sqrt{2}}{2} \int_0^{\frac{\pi}{6}} dt = \frac{\sqrt{2}}{2} t \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{2}\pi}{12}$$

$$\text{c)} \quad I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1 + \tan^2 x + 2 \tan x} d(\tan x) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{(\tan x + 1)^2} d(\tan x + 1) = -\frac{1}{\tan x + 1} \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}.$$

$$\begin{aligned} \text{d)} \text{ Ta có } I &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{3\sin^2 x + \cos^2 x} dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{3\sin^2 x + \cos^2 x} dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x (3\tan^2 x + 1)} dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin^2 x (3 + \cot^2 x)} dx = I_1 + I_2 \end{aligned}$$

Đặt $\sqrt{3}\tan x = \tan t, t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \sqrt{3} \frac{1}{\cos^2 x} dx = \frac{1}{\cos^2 t} dt = (1 + \tan^2 t) dt$.

Đổi cận $x = 0 \Rightarrow t = 0; x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow t = \frac{\pi}{3}$, ta có :

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\tan^2 t + 1} (1 + \tan^2 t) dt = \frac{1}{\sqrt{3}} t \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

Đặt $\cot x = \sqrt{3}\tan t, t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow -\frac{1}{\sin^2 x} dx = \frac{\sqrt{3}}{\cos^2 t} dt = \sqrt{3} (1 + \tan^2 t) dt$.

Đổi cận $x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow t = \frac{\pi}{6}; x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 0$, ta có :

$$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{3 + 3\tan^2 t} \sqrt{3} (1 + \tan^2 t) dt = \frac{1}{\sqrt{3}} t \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\pi}{6\sqrt{3}}$$

Vậy $I = I_1 + I_2 = \frac{\pi}{3\sqrt{3}} + \frac{\pi}{6\sqrt{3}} = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}$.

$$\begin{aligned} \text{e)} \text{ } I &= \sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\cos x (\cos x - \sin x)} dx = \sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\cos^2 x (1 - \tan x)} dx \\ &= \sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{1 - \tan x} d(\tan x) = -\sqrt{2} \ln |1 - \tan x| \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = \sqrt{2} \ln \frac{3 + \sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{f)} \text{ } I &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x}{5\tan x + 2(1 + \tan^2 x)} d(\tan x) = \frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{2}{\tan x + 2} - \frac{1}{2\tan x + 1} \right) d(\tan x) \\ &= \left(\frac{2}{3} \ln |\tan x + 2| - \frac{1}{6} \ln |2\tan x + 1| \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2} \ln 3 - \frac{2}{3} \ln 2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{g)} \text{ } I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + 2\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2} \left(\frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}} + 2\tan \frac{x}{2} \right)} dx \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + \tan^2 \frac{x}{2} + 2\tan \frac{x}{2}} d\left(\tan \frac{x}{2}\right) = -\frac{1}{1 + \tan \frac{x}{2}} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{h)} \text{ } I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} + 2\cos^2 \frac{x}{2}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2\cos^2 \frac{x}{2} (\tan \frac{x}{2} + 1)} dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\tan \frac{x}{2} + 1} d\left(\tan \frac{x}{2}\right) = \ln \left| \tan \frac{x}{2} + 1 \right| \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \ln 2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{i)} \text{ } I &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin(x + \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3})}{\sin(x + \frac{\pi}{3})} dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin(x + \frac{\pi}{3}) - \sqrt{3}\cos(x + \frac{\pi}{3})}{\sin(x + \frac{\pi}{3})} dx \\ &= \left(x - \sqrt{3} \ln \left| \sin(x + \frac{\pi}{3}) \right| \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{8} \ln \frac{3}{4} + \frac{\pi}{24}. \end{aligned}$$

§6. Ứng Dụng Của Tích Phân

5.28. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường cong sau :

a) $y = x^2 - 2x$; Ox ; $x = -1$ và $x = 2$;

b) $y = -x^3 - 3x^2$ và trục hoành;

c) $y = x^2 - 2x$ và $y = -x^2 + 4x$;

d) $y = \frac{x-1}{x+1}$ và hai trục tọa độ;

e) $y = x^3$; $x + y = 2$ và trục hoành;

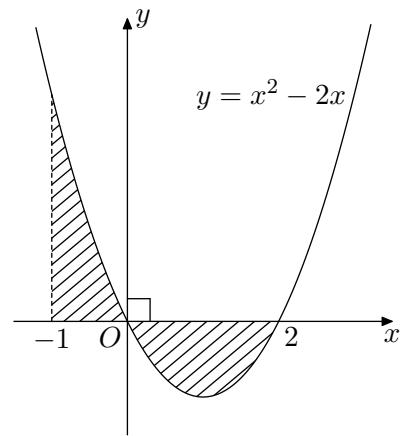
f) $y^2 = 2x$ và $27y^2 = 8(x-1)^3$.

Lời giải.

a) Phương trình hoành độ giao điểm: $x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$.

Diện tích hình phẳng cần tìm là

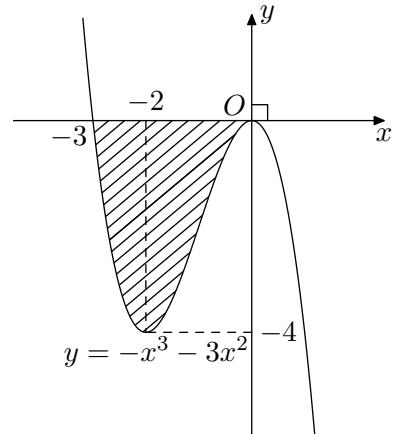
$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^0 |x^2 - 2x| dx + \int_0^2 |x^2 - 2x| dx \\ &= \int_{-1}^0 (x^2 - 2x) dx + \int_0^2 (2x - x^2) dx \\ &= \left(\frac{x^3}{3} - x^2 \right) \Big|_{-1}^0 + \left(x^2 - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^2 = \frac{8}{3}. \end{aligned}$$



b) Phương trình hoành độ giao điểm: $-x^3 - 3x^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -3 \end{cases}$.

Diện tích hình phẳng cần tìm là

$$\begin{aligned} S &= \int_{-3}^0 |-x^3 - 3x^2| dx = \int_{-3}^0 (x^3 + 3x^2) dx \\ &= \left(\frac{x^4}{4} + x^3 \right) \Big|_{-3}^0 = \frac{27}{4} \end{aligned}$$

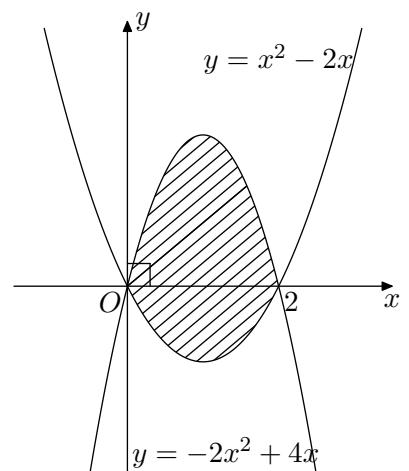


c) Phương trình hoành độ giao điểm:

$$x^2 - 2x = -x^2 + 4x \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \end{cases}$$

Diện tích hình phẳng cần tìm là

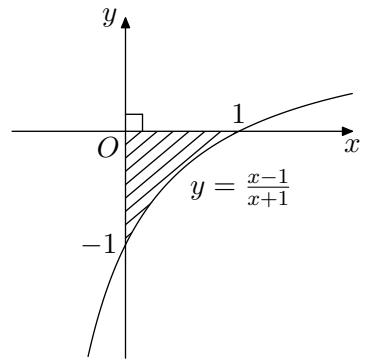
$$\begin{aligned} S &= \int_0^3 |(x^2 - 2x) - (-x^2 + 4x)| dx = \int_0^3 |2x^2 - 6x| dx \\ &= \int_0^3 (6x - 2x^2) dx = \left(3x^2 - \frac{2x^3}{3} \right) \Big|_0^3 = 9 \end{aligned}$$



d) Phương trình hoành độ giao điểm $\frac{x-1}{x+1} = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Diện tích hình phẳng cần tìm là

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 \left| \frac{x-1}{x+1} \right| dx = \int_0^1 \frac{-x+1}{x+1} dx = \int_0^1 \left(-1 + \frac{2}{x+1} \right) dx \\ &= (-x + 2 \ln|x+1|) \Big|_0^1 = 2 \ln 2 - 1 \end{aligned}$$



e) C1: Ta có $y = x^3 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{y}$, $x+y=2 \Leftrightarrow x=2-y$.

Phương trình tung giao điểm $\sqrt[3]{y} = 2-y \Leftrightarrow y = (2-y)^3 \Leftrightarrow y = 1$

Diện tích hình phẳng cần tìm là

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 |\sqrt[3]{y} - (2-y)| dy = \int_0^1 (2-y - \sqrt[3]{y}) dy \\ &= \left(2y - \frac{y^2}{2} - \frac{3\sqrt[3]{y^4}}{4} \right) \Big|_0^1 = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

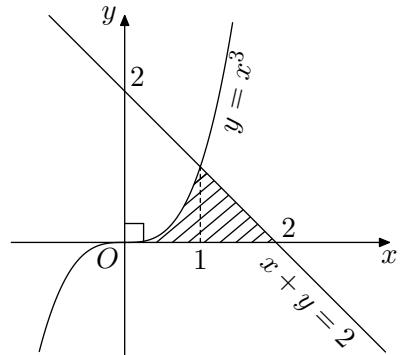
C2: (Cần phải vẽ hình)

Ta có $x+y=2 \Leftrightarrow y=2-x$.

Khi đó $x^3=0 \Leftrightarrow x=0$; $2-x=0 \Leftrightarrow x=2$ và $x^3=2-x \Leftrightarrow x=1$.

Dựa vào hình vẽ ta có diện tích hình phẳng cần tìm là

$$S = \int_0^1 x^3 dx + \int_1^2 (2-x) dx = \frac{x^4}{4} \Big|_0^1 + \left(2x - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_1^2 = \frac{3}{4}$$



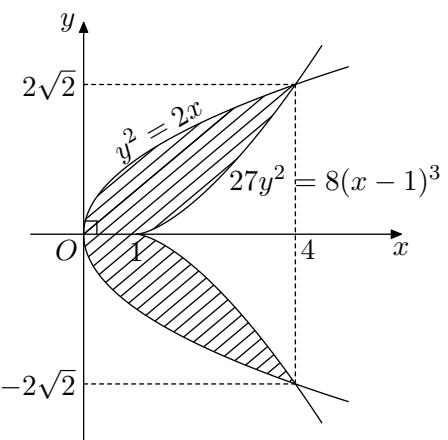
f) Ta có $y^2 = 2x \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}y^2$, $27y^2 = 8(x-1)^3 \Leftrightarrow x = 1 + \frac{3}{2}\sqrt[3]{y^2}$.

Phương trình tung giao điểm:

$$\frac{1}{2}y^2 = 1 + \frac{3}{2}\sqrt[3]{y^2} \Leftrightarrow (\sqrt[3]{y^2})^3 - 3\sqrt[3]{y^2} + 2 = 0 \Leftrightarrow y = \pm 2\sqrt{2}$$

Diện tích hình phẳng cần tìm là

$$\begin{aligned} S &= \int_{-2\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} \left| \frac{1}{2}y^2 - \left(1 + \frac{3}{2}\sqrt[3]{y^2} \right) \right| dy = \frac{1}{2} \int_{-2\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} \left(3\sqrt[3]{y^2} + 2 - y^2 \right) dy \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{9\sqrt[3]{y^5}}{5} + 2y - \frac{y^3}{3} \right) \Big|_{-2\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} = \frac{88\sqrt{2}}{15} \end{aligned}$$



Nhận xét. Ở bài tập trên việc rút ẩn y theo ẩn x là khó khăn do đó đưa diện tích cần tính về tích phân theo biến y là phù hợp.

5.29. Tính thể tích vật thể tròn xoay sinh ra bởi hình phẳng giới hạn bởi các đường cong sau khi quay quanh Ox :

a) $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2$, $y = 0$, $x = 0$ và $x = 3$;

c) $y = xe^x$, $x = 1$ và trực hoành;

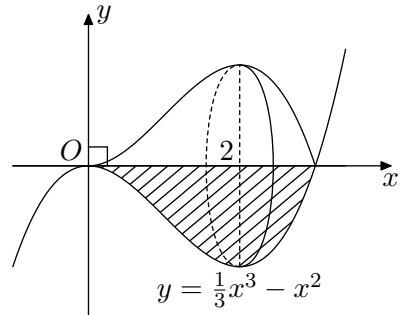
b) $y = 4 - x^2$ và $y = x^2 + 2$;

d) $y = \ln x$; $y = 0$ và $x = e$.

Lời giải.

a) Thể tích khối tròn xoay cần tìm là

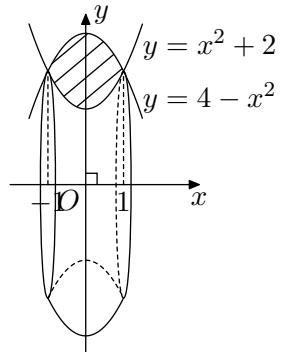
$$\begin{aligned} V_x &= \pi \int_0^3 \left(\frac{1}{3}x^3 - x^2 \right)^2 dx = \pi \int_0^3 \left(\frac{1}{9}x^6 - \frac{2}{3}x^5 + x^4 \right) dx \\ &= \pi \left(\frac{x^7}{63} - \frac{x^6}{9} + \frac{x^5}{5} \right) \Big|_0^3 = \frac{81\pi}{35} \end{aligned}$$



b) Ta có $4 - x^2 = x^2 + 2 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

Dựa vào hình vẽ ta có thể tích khối tròn xoay cần tìm là

$$\begin{aligned} V_x &= \pi \int_{-1}^1 \left[(4 - x^2)^2 - (x^2 + 2)^2 \right] dx \\ &= 12\pi \int_{-1}^1 (1 - x^2) dx = 12\pi \left(x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-1}^1 = 16\pi \end{aligned}$$



c) Phương trình hoành độ giao điểm: $x e^x = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Thể tích khối tròn xoay cần tìm là

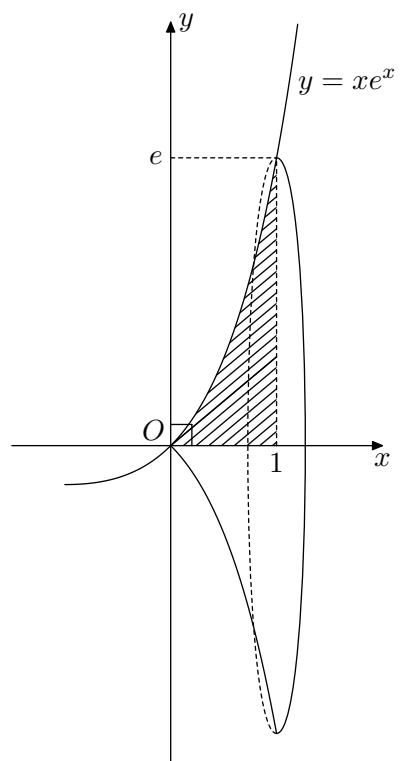
$$V_x = \pi \int_0^1 (x e^x)^2 dx = \pi \int_0^1 x^2 e^{2x} dx$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x^2 \\ dv = e^{2x} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2x dx \\ v = \frac{1}{2}e^{2x} \end{cases}, \text{ ta có :}$$

$$V_x = \frac{\pi}{2} x^2 e^{2x} \Big|_0^1 - \pi \int_0^1 x e^{2x} dx = \frac{\pi e^2}{2} - \pi \int_0^1 x e^{2x} dx$$

$$\text{Lại đặt } \begin{cases} u = x \\ dv = e^{2x} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \frac{1}{2}e^{2x} \end{cases}, \text{ ta có :}$$

$$V_x = \frac{\pi e^2}{2} - \frac{\pi}{2} x e^{2x} \Big|_0^1 + \frac{\pi}{2} \int_0^1 e^{2x} dx = \frac{\pi}{4} e^{2x} \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4} (e^2 - 1)$$



d) Phương trình hoành độ giao điểm: $x \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Thể tích khối tròn xoay cần tìm là

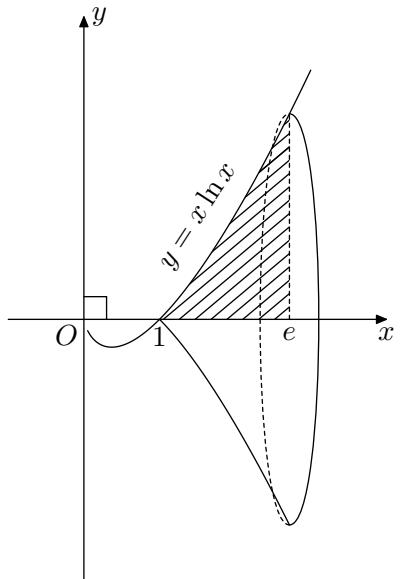
$$V_x = \pi \int_1^e (x \ln x)^2 dx = \pi \int_1^e x^2 \ln^2 x dx$$

Đặt $\begin{cases} u = \ln^2 x \\ dv = x^2 dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{2}{x} \ln x dx \\ v = \frac{x^3}{3} \end{cases}$, ta có :

$$V_x = \left. \frac{\pi}{3} x^3 \ln^2 x \right|_1^e - \frac{2\pi}{3} \int_1^e x^3 \ln x dx = \frac{\pi e^3}{3} - \frac{2\pi}{3} \int_1^e x^3 \ln x dx$$

Lại đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = x^2 dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x} dx \\ v = \frac{x^3}{3} \end{cases}$, ta có :

$$V_x = \left. \frac{\pi e^3}{3} - \frac{2\pi x^3 \ln x}{9} \right|_1^e + \left. \frac{2\pi}{9} \int x^2 dx \right|_1^e = \frac{\pi e^3}{9} + \left. \frac{2\pi x^3}{27} \right|_1^e = \frac{\pi}{27} (5e^3 - 2)$$



5.30. Tính thể tích vật thể tròn xoay sinh ra bởi hình phẳng giới hạn bởi các đường cong sau khi quay quanh Oy :

a) $y^2 = (x - 1)^3$ và $x = 2$; b) $4y = x^2$ và $y = x$;

c) $y = x^2$, $y = \frac{27}{x}$ và $y = \frac{x^2}{27}$; d) $y = 2x - x^2$ và $y = 0$.

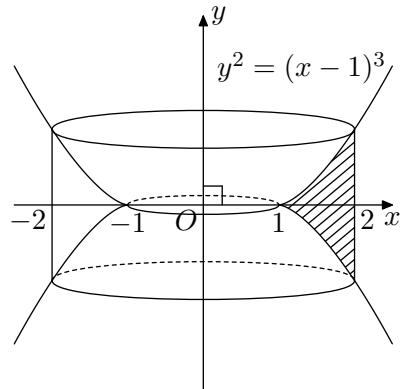
Lời giải.

a) Ta có: $y^2 = (x - 1)^3 \Leftrightarrow x = 1 + \sqrt[3]{y^2}$.

Phương trình tung độ giao điểm: $1 + \sqrt[3]{y^2} = 2 \Leftrightarrow y = \pm 1$.

Thể tích khối tròn xoay cần tìm là

$$\begin{aligned} V_y &= \int_{-1}^1 \left[4 - \left(1 + \sqrt[3]{y^2} \right)^2 \right] dy = \int_{-1}^1 \left(3 - 2\sqrt[3]{y^2} - \sqrt[3]{y^4} \right) dy \\ &= \left(3y - \frac{6\sqrt[3]{y^5}}{5} - \frac{\sqrt[3]{y^7}}{7} \right) \Big|_{-1}^1 = 4 \end{aligned}$$



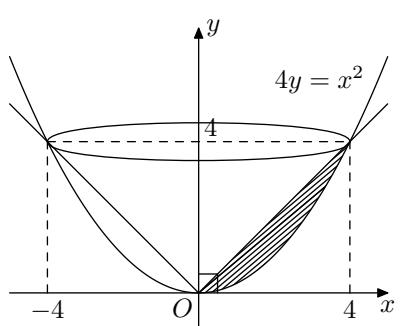
b) Từ $4y = x^2 \Rightarrow y \geq 0$ và $y = x \Rightarrow x \geq 0$.

Do đó $4y = x^2 \Leftrightarrow x = 2\sqrt{y}$.

Phương trình tung độ giao điểm: $2\sqrt{y} = y \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ y = 4 \end{cases}$.

Thể tích khối tròn xoay cần tìm là

$$V_y = \int_0^4 (4y - y^2) dy = \left(2y^2 - \frac{y^3}{3} \right) \Big|_0^4 = \frac{32}{3}$$



c) Từ hình vẽ thấy hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y = x^2$; $y = \frac{x^2}{27}$ và $y = \frac{27}{x}$ nằm ở góc phần tư thứ nhất.

Do đó xét $x, y \geq 0$ ta có $y = x^2 \Leftrightarrow x = \sqrt{y}$, $y = \frac{x^2}{27} \Leftrightarrow x = \sqrt{27y}$

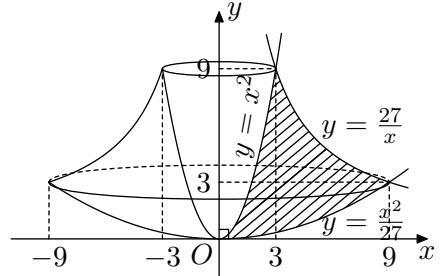
Và xét $x, y > 0$ ta có $y = \frac{27}{x} \Leftrightarrow x = \frac{27}{y}$.

Khi đó $\sqrt{y} = \sqrt{27y} \Leftrightarrow y = 0$; $\sqrt{y} = \frac{27}{y} \Leftrightarrow y = 9$

Và $\sqrt{27y} = \frac{27}{y} \Leftrightarrow y = 3$.

Dựa vào hình vẽ ta có thể tích khối tròn xoay cần tìm là

$$\begin{aligned} V_y &= \pi \int_0^3 (\sqrt{27y})^2 dy + \pi \int_3^9 \left(\frac{27}{y}\right)^2 dy - \pi \int_0^9 (\sqrt{y})^2 dy \\ &= 27\pi \int_0^3 y dy + 729\pi \int_3^9 \frac{1}{y^2} dy - \pi \int_0^9 y dy \\ &= \frac{27\pi y^2}{2} \Big|_0^3 - \frac{729\pi}{y} \Big|_3^9 + \frac{y^2}{2} \Big|_0^9 = 243\pi \end{aligned}$$



d) Ta có $y = 2x - x^2 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 1-y \Leftrightarrow |x-1| = \sqrt{1-y}$ nên với $x \geq 1$ thì $x = 1 + \sqrt{1-y}$; với $x < 1$ thì $x = 1 - \sqrt{1-y}$.

Khi đó $1 + \sqrt{1-y} = 1 - \sqrt{1-y} \Leftrightarrow y = 1$.

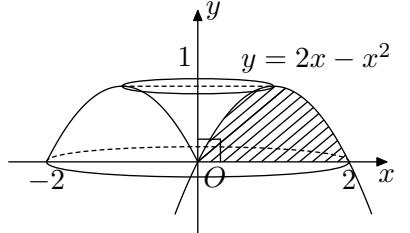
Dựa vào hình vẽ ta có thể tích khối tròn xoay cần tìm là

$$V_y = \pi \int_0^1 \left[(1 + \sqrt{1-y})^2 - (1 - \sqrt{1-y})^2 \right] dy = 4\pi \int_0^1 \sqrt{1-y} dy$$

Đặt $u = \sqrt{1-y} \Leftrightarrow u^2 = 1-y \Rightarrow 2udu = -dy$.

Đổi cận $y=0 \Rightarrow u=1$; $y=1 \Rightarrow u=0$, ta có :

$$V_y = 4\pi \int_0^1 u \cdot 2u du = \frac{8\pi u^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{8\pi}{3}$$



CÁC BÀI TOÁN THI

5.31. (THPTQG-2015) Tính tích phân $I = \int_0^1 (x-3)e^x dx$.

Lời giải. Đặt $\begin{cases} u = x-3 \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = e^x \end{cases}$, ta có :

$$I = (x-3)e^x \Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx = 3-2e - e^x \Big|_0^1 = 4-3e$$

5.32. (A-2014) Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong $y = x^2 - x + 3$ và đường thẳng $y = 2x + 1$.

Lời giải. Phương trình hoành độ giao điểm $x^2 - x + 3 = 2x + 1 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$.

Diện tích hình phẳng cần tìm là

$$\begin{aligned} S &= \int_1^2 |(x^2 - x + 3) - (2x + 1)| dx = \int_1^2 |x^2 - 3x + 2| dx = \int_1^2 (-x^2 + 3x - 2) dx \\ &= \left(-\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} - 2x \right) \Big|_1^2 = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

5.33. (B-2014) Tính tích phân $I = \int_1^2 \frac{x^2 + 3x + 1}{x^2 + x} dx$.

Lời giải. Ta có $I = \int_1^2 \left(1 + \frac{2x+1}{x^2+x} \right) dx = \int_1^2 1 dx + \int_1^2 \frac{1}{x^2+x} d(x^2+x) = x \Big|_1^2 + \ln|x^2+x| \Big|_1^2 = 1 + \ln 3$.

5.34. (D-2014) Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (x+1) \sin 2x dx$.

Lời giải. Đặt $\begin{cases} u = x+1 \\ dv = \sin 2x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -\frac{1}{2} \cos 2x \end{cases}$, ta có :

$$I = -\frac{1}{2} (x+1) \cos 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \sin 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{3}{4}$$

5.35. (CD-2014) Tính tích phân $I = \int_1^2 \frac{x^2 + 2 \ln x}{x} dx$.

Lời giải. Ta có $I = \int_1^2 \left(x + \frac{2 \ln x}{x} \right) dx = \int_1^2 x dx + \int_1^2 2 \ln x d(\ln x) = \frac{x^2}{2} \Big|_1^2 + \ln^2 x \Big|_1^2 = \frac{3}{2} + \ln^2 2$.

5.36. (A-2013) Tính tích phân $I = \int_1^2 \frac{x^2 - 1}{x^2} \ln x dx$.

Lời giải. Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = \frac{x^2 - 1}{x^2} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x} dx \\ v = x + \frac{1}{x} \end{cases}$, ta có :

$$I = \left(x + \frac{1}{x} \right) \ln x \Big|_1^2 - \int_1^2 \left(x + \frac{1}{x} \right) \frac{1}{x} dx = \frac{5}{2} \ln 2 - \int_1^2 \left(1 + \frac{1}{x^2} \right) dx = \frac{5}{2} \ln 2 - \left(x - \frac{1}{x} \right) \Big|_1^2 = \frac{5}{2} \ln 2 - \frac{3}{2}$$

5.37. (B-2013) Tính tích phân $I = \int_0^1 x \sqrt{2-x^2} dx$.

Lời giải. Đặt $u = \sqrt{2-x^2} \Leftrightarrow u^2 = 2-x^2 \Rightarrow u du = -x dx$.

Đổi cận $x=0 \Rightarrow u=\sqrt{2}; x=1 \Rightarrow u=1$, ta có :

$$I = \int_1^{\sqrt{2}} u \cdot u du = \int_1^{\sqrt{2}} u^2 du = \frac{u^3}{3} \Big|_1^{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}-1}{3}$$

5.38. (D-2013) Tính tích phân $I = \int_0^1 \frac{(x+1)^2}{x^2+1} dx$.

Lời giải.

Ta có $I = \int_0^1 \frac{(x+1)^2}{x^2+1} dx = \int_0^1 \frac{x^2+2x+1}{x^2+1} dx = \int_0^1 \left(1 + \frac{2x}{x^2+1}\right) dx = (x + \ln(x^2+1))|_0^1 = 1 + \ln 2$.

5.39. (CD-2013) Tính tích phân $I = \int_1^5 \frac{1}{1+\sqrt{2x-1}} dx$.

Lời giải. Đặt $u = \sqrt{2x-1} \Leftrightarrow u^2 = 2x-1 \Rightarrow u du = dx$.

Đổi cận $x=1 \Rightarrow u=1$; $x=5 \Rightarrow u=3$, ta có :

$$I = \int_1^3 \frac{1}{1+u} u du = \int_1^3 \left(1 - \frac{1}{1+u}\right) du = (u - \ln|1+u|)|_1^3 = 2 - \ln 2$$

5.40. (A-2012) Tính tích phân $I = \int_1^3 \frac{1+\ln(x+1)}{x^2} dx$.

Lời giải. Ta có $I = \int_1^3 \left(\frac{1}{x^2} + \frac{\ln(x+1)}{x^2}\right) dx = -\frac{1}{x}|_1^3 + \int_1^3 \frac{\ln(x+1)}{x^2} dx = \frac{2}{3} + \int_1^3 \frac{\ln(x+1)}{x^2} dx$.

Đặt $\begin{cases} u = \ln(x+1) \\ dv = \frac{1}{x^2} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x+1} dx \\ v = -\frac{1}{x} \end{cases}$, ta có :

$$I = \frac{2}{3} - \frac{\ln(x+1)}{x}|_1^3 + \int_1^3 \frac{1}{x(x+1)} dx = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} \ln 4 + \ln 2 + \int_1^3 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right) dx = \frac{2}{3} + \ln 3 - \frac{2}{3} \ln 2$$

5.41. (B-2012) Tính tích phân $I = \int_0^1 \frac{x^3}{x^4+3x^2+2} dx$.

Lời giải. Ta có $I = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+2)} dx^2$.

Lại có: $\frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+2)} = \frac{A}{x^2+1} + \frac{B}{x^2+2} = \frac{(A+B)x^2+2A+B}{(x^2+1)(x^2+2)}$.

Dòng nhất hệ số được $\begin{cases} A+B=1 \\ 2A+B=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=-1 \\ B=2 \end{cases}$. Khi đó

$$I = -\frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{x^2+1} dx^2 + \int_0^1 \frac{1}{x^2+2} dx^2 = -\frac{1}{2} \ln(x^2+1)|_0^1 + \ln(x^2+2)|_0^1 = \ln 3 - \frac{3}{2} \ln 2$$

5.42. (D-2012) Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x(1+\sin 2x) dx$.

Lời giải. Ta có $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (x+x \sin 2x) dx = \frac{x^2}{2}|_0^{\frac{\pi}{4}} + \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \sin 2x dx = \frac{\pi^2}{32} + \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \sin 2x dx$.

Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = \sin 2x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -\frac{1}{2} \cos 2x \end{cases}$, ta có :

$$I = \frac{\pi^2}{32} - \frac{x}{2} \cos 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x dx = \frac{\pi^2}{32} + \frac{1}{4} \sin 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi^2}{32} + \frac{1}{4}$$

5.43. (CD-2012) Tính tích phân $I = \int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx$.

Lời giải. Đặt $u = \sqrt{x+1} \Leftrightarrow u^2 = x+1 \Rightarrow 2udu = dx$.

Đổi cận $x=0 \Rightarrow u=1$; $x=3 \Rightarrow u=2$, ta có :

$$I = \int_1^2 \frac{u^2 - 1}{u} 2udu = \int_1^2 (2u^2 - 2) du = \left(\frac{2u^3}{3} - 2u \right) \Big|_1^2 = \frac{8}{3}$$

5.44. (A-2011) Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x \sin x + (x+1) \cos x}{x \sin x + \cos x} dx$

Lời giải. Ta có $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x \sin x + x \cos x + \cos x}{x \sin x + \cos x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(1 + \frac{x \cos x}{x \sin x + \cos x} \right) dx$
 $= x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x \cos x}{x \sin x + \cos x} dx = \frac{\pi}{4} + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x \cos x}{x \sin x + \cos x} dx$.

Đặt $u = x \sin x + \cos x \Rightarrow du = (x \cos x) dx$. Đổi cận $x=0 \Rightarrow u=1$; $x=\frac{\pi}{4} \Rightarrow u=\frac{4+\pi}{4\sqrt{2}}$, ta có :

$$I = \frac{\pi}{4} + \int_1^{\frac{4+\pi}{4\sqrt{2}}} \frac{1}{u} du = \ln |u| \Big|_1^{\frac{4+\pi}{4\sqrt{2}}} = \frac{\pi}{4} + \ln \frac{4+\pi}{4\sqrt{2}}$$

5.45. (B-2011) Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1+x \sin x}{\cos^2 x} dx$.

Lời giải. Ta có $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos^2 x} dx + \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{x \sin x}{\cos^2 x} dx = \tan x \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} + \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{x \sin x}{\cos^2 x} dx = \sqrt{3} + \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{x \sin x}{\cos^2 x} dx$.

Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \frac{1}{\cos x} \end{cases}$, ta có :

$$\begin{aligned} I &= \sqrt{3} + \frac{x}{\cos x} \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos x} dx = \sqrt{3} + \frac{2\pi}{3} - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x}{\cos^2 x} dx = \sqrt{3} + \frac{2\pi}{3} - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{1-\sin^2 x} d(\sin x) \\ &= \sqrt{3} + \frac{2\pi}{3} - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1-\sin x + 1+\sin x}{(1-\sin x)(1+\sin x)} d(\sin x) \\ &= \sqrt{3} + \frac{2\pi}{3} - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{1}{1+\sin x} + \frac{1}{1-\sin x} \right) d(\sin x) \\ &= \sqrt{3} + \frac{2\pi}{3} - \frac{1}{2} (\ln |1+\sin x| - \ln |1-\sin x|) \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = \sqrt{3} + \frac{2\pi}{3} - \ln (2+\sqrt{3}) \end{aligned}$$

5.46. (D-2011) Tính tích phân $I = \int_0^4 \frac{4x-1}{\sqrt{2x+1}+2} dx$.

Lời giải. Đặt $u = \sqrt{2x+1} \Leftrightarrow u^2 = 2x+1 \Rightarrow 2udu = 2dx$. Đổi cận $x=0 \Rightarrow u=1$; $x=4 \Rightarrow u=3$, ta có :

$$\begin{aligned} I &= \int_1^3 \frac{2(u^2-1)-1}{u+2} u du = \int_1^3 \frac{2u^3-3u}{u+2} du = \int_1^3 \left(2u^2-4u+5-\frac{10}{u+2}\right) du \\ &= \left(\frac{2u^3}{3}-2u^2-10\ln|u+2|\right) \Big|_1^3 = \frac{34}{3} + 10\ln\frac{3}{5} \end{aligned}$$

5.47. (CD-2011) Tính tích phân $I = \int_1^2 \frac{2x+1}{x(x+1)} dx$.

Lời giải. Ta có $I = \int_1^2 \left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x}\right) dx = (\ln|x+1| + \ln|x|)|_1^2 = \ln 3$.

5.48. (A-2010) Tính tích phân $I = \int_0^1 \frac{x^2 + e^x + 2x^2e^x}{1+2e^x} dx$.

Lời giải. Ta có $I = \int_0^1 \frac{x^2(1+2e^x) + e^x}{1+2e^x} dx = \int_0^1 \left(x^2 + \frac{e^x}{1+2e^x}\right) dx = \int_0^1 x^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{1+2e^x} d(1+2e^x)$
 $= \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 + \frac{1}{2} \ln|1+2e^x| \Big|_0^1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \ln \frac{1+2e}{3}$.

5.49. (B-2010) Tính tích phân $I = \int_1^e \frac{\ln x}{x(2+\ln x)^2} dx$.

Lời giải. Đặt $u = 2 + \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx$. Đổi cận $x=1 \Rightarrow u=2$; $x=e \Rightarrow u=3$, ta có :

$$I = \int_2^3 \frac{u-2}{u^2} du = \int_2^3 \left(\frac{1}{u} - \frac{2}{u^2}\right) du = \left(\ln|u| + \frac{2}{u}\right) \Big|_2^3 = \ln\frac{3}{2} - \frac{1}{3}$$

5.50. (D-2010) Tính tích phân $I = \int_1^e \left(2x - \frac{3}{x}\right) \ln x dx$.

Lời giải. Ta có $I = \int_1^e 2x \ln x dx - \int_1^e \frac{3}{x} \ln x dx = I_1 - 3 \int_1^e \ln x d(\ln x) = I_1 - \frac{3\ln^2 x}{2} \Big|_1^e = I_1 - \frac{3}{2}$.

Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = 2x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x} dx \\ v = x^2 \end{cases}$, ta có :

$$I_1 = x^2 \ln x \Big|_1^e - \int_1^e x^2 \frac{1}{x} dx = 4 \ln 2 - \int_1^e x dx = 4 \ln 2 - \frac{x^2}{2} \Big|_1^e = 4 \ln 2 - \frac{e^2}{2} + \frac{1}{2}$$

Vậy $I = 4 \ln 2 - \frac{e^2}{2} + \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = 4 \ln 2 - \frac{e^2}{2} - 1$.

5.51. (CD-2010) Tính tích phân $I = \int_0^1 \frac{2x-1}{x+1} dx$.

Lời giải. Ta có $I = \int_0^1 \left(2 - \frac{3}{x+1}\right) dx = (2x - 3 \ln|x+1|)|_0^1 = 2 - 3 \ln 2$.

5.52. (A-2009) Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^3 x - 1) \cos^2 x dx$.

Lời giải. Ta có $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^5 x - \cos^2 x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx$
 $= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 x)^2 d(\sin x) - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2x) dx$
 $= \left(\sin x - \frac{2\sin^3 x}{3} + \frac{\sin^5 x}{5} \right)|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{2} \sin 2x \right)|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{8}{15} - \frac{\pi}{4}$.

5.53. (B-2009) Tính tích phân $I = \int_1^3 \frac{3 + \ln x}{(1+x)^2} dx$.

Lời giải. Đặt $\begin{cases} u = 3 + \ln x \\ dv = \frac{1}{(1+x)^2} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x} dx \\ v = -\frac{1}{1+x} \end{cases}$, ta có :

$$I = -\frac{3 + \ln x}{1+x}|_1^3 + \int_1^3 \frac{1}{x(1+x)} dx = \frac{3 - \ln 3}{4} + \int_1^3 \frac{1+x-x}{x(1+x)} dx = \frac{3 - \ln 3}{4} + \int_1^3 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{1+x} \right) dx$$
 $= \frac{3 - \ln 3}{4} + (\ln|x| - \ln|1+x|)|_1^3 = \frac{1}{4} \left(3 + \ln \frac{27}{16} \right)$

5.54. (D-2009) Tính tích phân $I = \int_1^3 \frac{1}{e^x - 1} dx$.

Lời giải. Ta có $I = \int_1^3 \frac{e^x - (e^x - 1)}{e^x - 1} dx = \int_1^3 \left(\frac{e^x}{e^x - 1} - 1 \right) dx = (\ln|e^x - 1| - x)|_1^3 = \ln(e^2 + e + 1) - 2$.

5.55. (CD-2009) Tính tích phân $I = \int_0^1 (e^{-2x} + x) e^x dx$.

Lời giải. Ta có $I = \int_0^1 (e^{-2x} + x) e^x dx = \int_0^1 e^{-x} dx + \int_0^1 x e^x dx = -e^{-x}|_0^1 + \int_0^1 x e^x dx = 1 - \frac{1}{e} + \int_0^1 x e^x dx$.

Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = e^x \end{cases}$, ta có :

$$I = 1 - \frac{1}{e} + x e^x|_0^1 - \int_0^1 e^x dx = 1 - \frac{1}{e} + e - e^x|_0^1 = 2 - \frac{1}{e}$$