Mục lục

Chuyên đề 6. Số Phức **3**
§1. Dạng Đại Số Của Số Phức 3
§2. Phương Trình Bậc Hai Nghiệm Phức 7
§3. Dạng Lượng Giác Của Số Phức 9

Chuyên đề 6

Số Phức

§1. Dạng Đại Số Của Số Phức

6.1. Thực hiện các phép tính sau :

a) $(5-4i)+(2+i)-(1+7i)$;

b) $(7-3i)(-3+5i)$;

c) $(1-2i)(3+i)(2-5i)$;

d) $\dfrac{3-i}{2+3i}$.

Lời giải.

a) $(5-4i)+(2+i)-(1+7i)=5-4i+2+i-1-7i=6-10i$.

b) $(7-3i)(-3+5i)=-21+35i+9i-15i^2=6+44i$.

c) $(1-2i)(3+i)(2-5i)=(5-5i)(2-5i)=-15-35i$.

d) $\dfrac{3-i}{2+3i}=\dfrac{(3-i)(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)}=\dfrac{3-11i}{13}=\dfrac{3}{13}-\dfrac{11}{13}i$.

6.2. Tìm phần thực và phần ảo của các số phức sau :

a) $z=4-3i+\dfrac{5+4i}{3+6i}$;

b) $z=\dfrac{2-i}{1+4i}+\dfrac{3+2i}{1-2i}$;

c) $z=\dfrac{(2-3i)\,(1+i)}{4+i}$;

d) $z=\dfrac{2i(2+3i)^2}{3+4i}$.

Lời giải.

a) $4-3i+\dfrac{5+4i}{3+6i}=4-3i+\dfrac{(5+4i)(3-6i)}{(3+6i)(3-6i)}=4-3i+\dfrac{39-18i}{45}=4-3i+\dfrac{39}{45}-\dfrac{18}{45}i=\dfrac{73}{15}-\dfrac{17}{5}i$.

b) $z=\dfrac{(2-i)(1-4i)}{(1+4i)(1-4i)}+\dfrac{(3+2i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)}=-\dfrac{27}{85}+\dfrac{91}{85}i\Rightarrow$ phần thực là $\dfrac{27}{85}$; phần ảo là $\dfrac{91}{85}$.

c) $z=\dfrac{5-i}{4+i}=\dfrac{(5-i)(4-i)}{(4+i)(4-i)}=\dfrac{19-9i}{17}=\dfrac{19}{17}-\dfrac{9}{17}i\Rightarrow$ phần thực là $\dfrac{19}{17}$; phần ảo là $-\dfrac{9}{17}$.

d) $z=\dfrac{2i(-5+12i)}{3+4i}=\dfrac{(-24-10i)(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)}=-\dfrac{112}{25}+\dfrac{66}{25}i\Rightarrow$ phần thực là $-\dfrac{112}{25}$; phần ảo là $\dfrac{66}{25}$.

6.3. Tìm phần thực và phần ảo của các số phức sau :

a) $z=i^{1001}$;

b) $z=(1-i)^{98}$;

c) $z=(1+i)^{2013}$;

d) $z=\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^{33}$.

Lời giải.

a) $z=(i^2)^{500}i=i\Rightarrow$ phần thực là 0; phần ảo là 1.

b) $z=((1-i)^2)^{49}=(-2i)^{49}=-2^{49}.(i^2)^{24}.i=-2^{49}i\Rightarrow$ phần thực là 0; phần ảo là -2^{49}.

c) $z=((1+i)^2)^{1006}(1+i)=(2i)^{1006}(1+i)=-2^{1006}-2^{1006}i\Rightarrow$ phần thực là -2^{1006}; phần ảo là -2^{1006}.

d) $z=\dfrac{(2i)^{16}(1+i)}{(-2i)^{16}(1-i)}=\dfrac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}=i\Rightarrow$ phần thực là 0; phần ảo là 1.

6.4. Tìm phần thực và phần ảo của số phức z thỏa mãn điều kiện $(2+i)z+3-5i=1+2i$.

Lời giải. Ta có $(2+i)z+3-5i=1+2i \Leftrightarrow z=\dfrac{-2+7i}{2+i} \Leftrightarrow z=\dfrac{(-2+7i)(2-i)}{5} \Leftrightarrow z=\dfrac{3}{5}+\dfrac{16}{5}i$.

Vậy z có phần thực là $\dfrac{3}{5}$ và phần ảo là $\dfrac{16}{5}$.

6.5. Tìm môđun của số phức $w=(1-z)\overline{z}$ thỏa mãn điều kiện $(1-i)z+5+2i=2(z-i+3)$.

Lời giải. Ta có $(1-i)z+5+2i=2(z-i+3) \Leftrightarrow (1+i)z=-1+4i \Leftrightarrow z=\dfrac{-1+4i}{1+i} \Leftrightarrow z=\dfrac{3}{2}+\dfrac{5}{2}i$.

Do đó $w=(1-z)\overline{z}=\left(1-\dfrac{3}{2}-\dfrac{5}{2}i\right)\left(\dfrac{3}{2}-\dfrac{5}{2}i\right)=-7-\dfrac{5}{2}i$.

Vậy $|w|=\sqrt{49+\dfrac{25}{4}}=\dfrac{1}{2}\sqrt{221}$.

6.6. Tìm số phức z thỏa mãn điều kiện $z+(1+i)\overline{z}=1+2i$.

Lời giải. Gọi $z=a+bi$ $(a,b\in\mathbb{R}) \Rightarrow \overline{z}=a-bi$, ta có :

$$\begin{aligned}
z+(1+i)\overline{z}=1+2i &\Leftrightarrow a+bi+(1+i)(a-bi)=1+2i\\
&\Leftrightarrow 2a+b+ai=1+2i\\
&\Leftrightarrow \begin{cases}2a+b=1\\ a=2\end{cases}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases}a=2\\ b=-3\end{cases}
\end{aligned}$$

Vậy $z=2-3i$.

6.7. Tính môđun của số phức z thỏa mãn điều kiện $|z-1-2i|^2+iz+\overline{z}=11+2i$.

Lời giải. Gọi $z=a+bi$ $(a,b\in\mathbb{R}) \Rightarrow \overline{z}=a-bi$, ta có :

$$\begin{aligned}
|z-1-2i|^2+iz+\overline{z}=11+2i &\Leftrightarrow |a+bi-1-2i|^2+i(a+bi)+(a-bi)=11+2i\\
&\Leftrightarrow |a-1+(b-2)i|^2-b+ai+a-bi=11+2i\\
&\Leftrightarrow (a-1)^2+(b-2)^2+a-b+(a-b)i=11+2i\\
&\Leftrightarrow \begin{cases}a^2+b^2-a-5b+5=11 & (1)\\ a-b=2 & (2)\end{cases}
\end{aligned}$$

Từ (2) ta có $b=a-2$ thay vào (1) được $2a^2-10a+8=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a=1\\ a=4\end{array}\right.$.

Với $a=1 \Rightarrow b=-1 \Rightarrow z=1-i \Rightarrow |z|=\sqrt{2}$.
Với $a=4 \Rightarrow b=2 \Rightarrow z=4+2i \Rightarrow |z|=2\sqrt{5}$.
Vậy $|z|=\sqrt{2}$ hoặc $|z|=2\sqrt{5}$.

6.8. Giải phương trình $z^2+|z|=0$ trên tập hợp các số phức.

Lời giải. Gọi $z=a+bi$ $(a,b\in\mathbb{R}) \Rightarrow |z|=\sqrt{a^2+b^2}$. Ta có:

$$\begin{aligned}
z^2+|z|=0 &\Leftrightarrow (a+bi)^2+\sqrt{a^2+b^2}=0 \Leftrightarrow a^2-b^2+\sqrt{a^2+b^2}+2abi=0\\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}a^2-b^2+\sqrt{a^2+b^2}=0\\ 2ab=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}a^2-b^2+\sqrt{a^2+b^2}=0 \quad (1)\\ \left[\begin{array}{l}a=0\\ b=0\end{array}\right.\end{array}\right.
\end{aligned}$$

Với $a=0$ thay vào (1) ta có: $-b^2+\sqrt{b^2}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}b=0\\ b=\pm1\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}z=0\\ z=\pm i\end{array}\right.$.

Với $b=0$ thay vào (1) ta có: $a^2+\sqrt{a^2}=0 \Leftrightarrow a=0 \Rightarrow z=0$.
Vậy $z=0$ và $z=\pm i$.

6.9. Tìm số phức z thỏa mãn điều kiện $z + \dfrac{1+i}{(1-i)\overline{z}} = (1-i)|z|$.

Lời giải. Với điều kiện $z \neq 0$ ta có

$$z + \frac{1+i}{(1-i)\overline{z}} = (1-i)\,|z| \Leftrightarrow z\overline{z} + \frac{1+i}{1-i} = (1-i)\,|z|\,\overline{z} \Leftrightarrow z\overline{z} + i = (1-i)\,|z|\,\overline{z}\ (*)$$

Đặt $z = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$, ta có

$$\begin{aligned}(*) &\Leftrightarrow a^2 + b^2 + i = (1-i)\sqrt{a^2+b^2}\,(a-bi)\\ &\Leftrightarrow a^2 + b^2 + i = (a-b)\sqrt{a^2+b^2} - (a+b)\,i\sqrt{a^2+b^2}\\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2 = (a-b)\sqrt{a^2+b^2}\\ (a+b)\sqrt{a^2+b^2} = -1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{a^2+b^2} = a-b & (1)\\ (a+b)\sqrt{a^2+b^2} = -1 & (2)\end{cases}\end{aligned}$$

Ta có (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} a-b \geq 0\\ a^2+b^2 = a^2+b^2-2ab\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq b\\ ab = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq b\\ \left[\begin{array}{l} a = 0\\ b = 0\end{array}\right.\end{cases}$.

Với $a = 0$ thay vào (2) được $b\sqrt{b^2} = -1 \Leftrightarrow \begin{cases} b \leq 0\\ b^4 = 1\end{cases} \Leftrightarrow b = -1$ (thỏa mãn) $\Rightarrow z = -i$.

Với $b = 0$ thay vào (2) được $a\sqrt{a^2} = -1 \Leftrightarrow \begin{cases} a \leq 0\\ a^4 = 1\end{cases} \Leftrightarrow a = -1$ (không thỏa mãn).

Vậy số phức cần tìm là $z = -i$.

6.10. Tìm số phức z thỏa mãn điều kiện $|z| = |z-2-2i|$ và $\dfrac{z-2i}{z-2}$ là số thuần ảo.

Lời giải. Gọi $z = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$. Ta có

$$|z| = |z-2-2i| \Leftrightarrow |a+bi| = |a+bi-2-2i| \Leftrightarrow a^2+b^2 = (a-2)^2+(b-2)^2 \Leftrightarrow a = 2-b \Rightarrow z = 2-b+bi$$

Khi đó $\dfrac{z-2i}{z-2} = \dfrac{2-b+bi-2i}{2-b+bi-2} = \dfrac{(b-2)(-1+i)}{b(-1+i)} = \dfrac{b-2}{b}$.

Do đó $\dfrac{z-2i}{z-2}$ là số thuần ảo $\Leftrightarrow b-2 = 0 \Leftrightarrow b = 2 \Rightarrow a = 0$. Vậy $z = 2i$.

6.11. Tìm số phức z thoả mãn đồng thời $\left|\dfrac{z-1}{z-i}\right| = 1, \left|\dfrac{z-2i}{z+i}\right| = 1$.

Lời giải. Gọi $z = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$. Ta có

$$\begin{cases}\left|\frac{z-1}{z-i}\right| = 1\\ \left|\frac{z-2i}{z+i}\right| = 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}|a+bi-1| = |a+bi-i|\\ |a+bi-2i| = |a+bi+i|\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(a-1)^2+b^2 = a^2+(b-1)^2\\ a^2+(b-2)^2 = a^2+(b+1)^2\end{cases} \Leftrightarrow a = b = \frac{1}{2}$$

Vậy $z = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}i$.

6.12. Tìm số phức z có môđun nhỏ nhất thỏa mãn điều kiện $|iz-3| = |z-2-i|$.

Lời giải. Gọi $z = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$. Ta có

$$\begin{aligned}|iz-3| = |z-2-i| &\Leftrightarrow |i(a+bi)-3| = |a+bi-2-i| \Leftrightarrow |-b-3+ai| = |a-2+(b-1)i|\\ &\Leftrightarrow (b+3)^2+a^2 = (a-2)^2+(b-1)^2 \Leftrightarrow a = -2b-1 \Rightarrow z = -2b-1+bi\end{aligned}$$

Khi đó $|z| = \sqrt{5b^2+4b+1} = \sqrt{\left(\sqrt{5}b + \frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 + \frac{1}{5}} \geq \dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \sqrt{5}b + \dfrac{2}{\sqrt{5}} = 0 \Leftrightarrow b = -\dfrac{2}{5}$. Vậy $z = -\dfrac{1}{5} - \dfrac{2}{5}i$.

6.13. Tìm tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thoả mãn điều kiện :

a) $|z+\overline{z}+3|=4$.

b) $|z-\overline{z}+1-i|=2$.

c) $|2+z|=|i-z|$.

d) $|2+z|>|z-2|$.

e) $\left|z^2-(\overline{z})^2\right|=4$.

f) $2\,|z-i|=|z-\overline{z}+2i|$.

g) $|z-1+i|=2$.

h) $|z-i|=|(1+i)\,z|$.

Lời giải.

a) Gọi $z=x+yi\ (x,y\in\mathbb{R})\Rightarrow\overline{z}=x-yi$. Ta có

$$|z+\bar{z}+3|=4\Leftrightarrow|x+yi+x-yi+3|=4\Leftrightarrow|2x+3|=4\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{1}{2}\\x=-\frac{7}{2}\end{array}\right.$$

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là hai đường thẳng $x=\dfrac{1}{2}$ và $x=-\dfrac{7}{2}$.

b) Gọi $z=x+yi\ (x,y\in\mathbb{R})\Rightarrow\overline{z}=x-yi$. Ta có

$$|z-\bar{z}+1-i|=2\Leftrightarrow|x+yi-x+yi+1-i|=2\Leftrightarrow|1+(2y-1)i|=2$$
$$\Leftrightarrow 1+4y^2-4y+1=4\Leftrightarrow y=\frac{1\pm\sqrt{3}}{2}$$

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là hai đường thẳng $y=\dfrac{1\pm\sqrt{3}}{2}$.

c) Gọi $z=x+yi\ (x,y\in\mathbb{R})$. Ta có

$$|2+z|=|i-z|\Leftrightarrow|2+x+yi|=|i-x-yi|\Leftrightarrow(x+2)^2+y^2=x^2+(y-1)^2\Leftrightarrow 4x+2y+3=0$$

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là đường thẳng $4x+2y+3=0$.

d) Gọi $z=x+yi\ (x,y\in\mathbb{R})$. Ta có

$$|2+z|>|z-2|\Leftrightarrow|2+x+yi|>|x+yi-2|\Leftrightarrow(x+2)^2+y^2>(x-2)^2+y^2\Leftrightarrow x>0$$

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là nửa mặt phẳng nằm bên phải trục Oy, không kể trục Oy.

e) Gọi $z=x+yi\ (x,y\in\mathbb{R})\Rightarrow\overline{z}=x-yi$. Ta có

$$\left|z^2-(\bar{z})^2\right|=4\Leftrightarrow\left|(x+yi)^2-(x-yi)^2\right|=4\Leftrightarrow|xyi|=1\Leftrightarrow y=\pm\frac{1}{x}$$

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là hai hypebol $y=\pm\dfrac{1}{x}$.

f) Gọi $z=x+yi\ (x,y\in\mathbb{R})\Rightarrow\overline{z}=x-yi$. Ta có

$$2\,|z-i|=|z-\bar{z}+2i|\Leftrightarrow 2\,|x+yi-i|=|x+yi-x+yi+2i|\Leftrightarrow|x+(y-1)\,i|=|(y+1)\,i|$$
$$\Leftrightarrow a^2+(b-1)^2=(b+1)^2\Leftrightarrow x^2=4y\Leftrightarrow y=\frac{1}{4}x$$

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là parabol $y=\dfrac{1}{4}x$.

g) Gọi $z=x+yi\ (x,y\in\mathbb{R})$. Ta có

$$|z-1+i|=2\Leftrightarrow|x+yi-1+i|=2\Leftrightarrow|x-1+(y+1)i|=2\Leftrightarrow(x-1)^2+(y+1)^2=4$$

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là đường tròn tâm $I(1;-1)$ và bán kính $R=2$.

h) Gọi $z=x+yi\ (x,y\in\mathbb{R})$. Ta có

$$|z-i|=|(1+i)\,z|\Leftrightarrow|x+yi-i|=|(1+i)\,(x+yi)|\Leftrightarrow|x+(y-1)i|=|x-y+(x+y)i|$$
$$\Leftrightarrow x^2+(y-1)^2=(x-y)^2+(x+y)^2\Leftrightarrow x^2+y^2+2y-1=0$$

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là đường tròn tâm $I(0;-1)$ và bán kính $R=\sqrt{2}$.

6.14. Tìm tập hợp các điểm biểu diễn số phức $w=2z-i-3$, biết $|z-2+3i|=5$.

Lời giải. Ta có $w = 2z - i - 3 \Leftrightarrow z = \dfrac{w+3+i}{2}$. Từ đó suy ra

$$|z - 2 + 3i| = 5 \Leftrightarrow \left|\frac{w+3+i}{2} - 2 + 3i\right| = 5 \Leftrightarrow |w + 3 + i - 4 + 6i| = 10 \Leftrightarrow |w - 1 + 7i| = 10$$

Gọi $w = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$. Ta có

$$|w - 1 + 7i| = 10 \Leftrightarrow |x + yi - 1 + 7i| = 10 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+7)^2 = 100$$

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn số phức w là đường tròn tâm $I(1; -7)$ và bán kính $R = 10$.

§2. Phương Trình Bậc Hai Nghiệm Phức

6.15. Tìm các căn bậc hai của các số phức sau :

a) $z = -3 + 4i$.
b) $z = 5 - 12i$.
c) $z = -24 + 10i$.
d) $z = 1 + 4i\sqrt{3}$.
e) $z = 17 + 20i\sqrt{2}$.
f) $z = -1 - 2i\sqrt{6}$.

Lời giải.

a) Ta có $z = -3 + 4i = (1 + 2i)^2$, suy ra z có hai căn bậc hai là $\pm(1 + 2i)$.
b) Ta có $z = 5 - 12i = (3 - 2i)^2$, suy ra z có hai căn bậc hai là $\pm(3 - 2i)$.
c) Ta có $z = -24 + 10i = (1 + 5i)^2$, suy ra z có hai căn bậc hai là $\pm(1 + 5i)$.
d) Ta có $z = 1 + 4i\sqrt{3} = (2 + \sqrt{3}i)^2$, suy ra z có hai căn bậc hai là $\pm(2 + \sqrt{3}i)$.
e) Ta có $z = 17 + 20i\sqrt{2} = (5 + 2\sqrt{2}i)^2$, suy ra z có hai căn bậc hai là $\pm(5 + 2\sqrt{2}i)$.
f) Ta có $z = -1 - 2i\sqrt{6} = (\sqrt{2} - \sqrt{3}i)^2$, suy ra z có hai căn bậc hai là $\pm(\sqrt{2} - \sqrt{3}i)$.

6.16. Giải các phương trình sau :

a) $z^4 + z^2 - 6 = 0$.
b) $z^2 - 2z + 2 = 0$.
c) $2z^2 - 5z + 4 = 0$.
d) $-3z^2 + 2z - 1 = 0$.

Lời giải.

a) Ta có $z^4 + z^2 - 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z^2 = 2 \\ z^2 = -3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z = \pm\sqrt{2} \\ z = \pm i\sqrt{3} \end{array}\right.$.
b) Ta có $\Delta' = 1 - 2 = -1 < 0$. Phương trình có hai nghiệm $z = 1 \pm i$.
c) Ta có $\Delta = 25 - 32 = -7 < 0$. Phương trình có hai nghiệm $z = \dfrac{5 \pm i\sqrt{7}}{4}$.
d) Ta có $\Delta' = 1 - 3 = -2 < 0$. Phương trình có hai nghiệm $z = \dfrac{1 \pm i\sqrt{2}}{3}$.

6.17. Ký hiệu z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $2z^2 - 2z + 1 = 0$. Tính $A = \dfrac{1}{z_1^2} + \dfrac{1}{z_2^2}$.

Lời giải. Ta có $\Delta' = 1 - 2 = -1 < 0$. Phương trình có hai nghiệm $z_{1,2} = \dfrac{1 \pm i}{2}$.

Khi đó $A = \dfrac{1}{z_1^2} + \dfrac{1}{z_2^2} = \dfrac{4}{(1+i)^2} + \dfrac{4}{(1-i)^2} = \dfrac{2}{i} - \dfrac{2}{i} = 0$.

6.18. Giải các phương trình sau :

a) $z^2 - (5 - i)z + 8 - i = 0$.
b) $z^2 + (1 - 2i)z + 1 + 5i = 0$.
c) $z^2 - 2(2 + i)z + 7 + 4i = 0$.
d) $iz^2 - 2(1 - i)z - 4 = 0$.

Lời giải.

a) Ta có $\Delta = (5 - i)^2 - 4(8 - i) = -8 - 6i = (1 - 3i)^2$.

Phương trình có hai nghiệm $\left[\begin{array}{l} z = \dfrac{5 - i + 1 - 3i}{2} \\ z = \dfrac{5 - i - 1 + 3i}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z = 3 - 2i \\ z = 2 + i \end{array}\right.$.

b) Ta có $\Delta = (1 - 2i)^2 - 4(1 + 5i) = -7 - 24i = (3 - 4i)^2$.

Phương trình có hai nghiệm $\left[\begin{array}{l} z=\dfrac{-1+2i+3-4i}{2} \\ z=\dfrac{-1+2i-3+4i}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=1-i \\ z=-2+3i \end{array}\right.$.

c) Ta có $\Delta'=(2+i)^2-7-4i=-4<0$. Phương trình có hai nghiệm $\left[\begin{array}{l} z=2+3i \\ z=2-i \end{array}\right.$.

d) Ta có $\Delta'=(1-i)^2+4i=(1+i)^2$.

Phương trình có hai nghiệm $\left[\begin{array}{l} z=\dfrac{1-i+1+i}{i} \\ z=\dfrac{1-i-1-i}{i} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=\dfrac{2}{i} \\ z=\dfrac{-2i}{i} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=-2i \\ z=-2 \end{array}\right.$.

6.19. Cho z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2-(i+2)z+i=0$. Tính $\left|\dfrac{z_1}{z_2}+\dfrac{z_2}{z_1}\right|$.

Lời giải. Ta có $\Delta=(2+i)^2-4i=3$. Phương trình có hai nghiệm $z_{1,2}=\dfrac{2\pm\sqrt{3}+i}{2}$.

Khi đó $\left|\dfrac{z_1}{z_2}+\dfrac{z_2}{z_1}\right|=\left|\dfrac{z_1^2+z_2^2}{z_1z_2}\right|=\left|\dfrac{(z_1+z_2)^2-2z_1z_2}{z_1z_2}\right|=\left|\dfrac{(2+i)^2-2i}{i}\right|=\dfrac{|3+2i|}{|i|}=\sqrt{13}$.

6.20. Giải các phương trình sau :

a) $(z-i)\left(z^2+1\right)\left(z^3+i\right)=0$.

b) $8z^4+8z^3=z+1$.

c) $z^4+6z^3+9z^2+101=i^{3000}$.

d) $z^3-2(1+i)z^2+3iz+1-i=0$.

e) $z^4-4z^3+7z^2-16z+12=0$.

f) $z^4-z^3+\dfrac{z^2}{2}+z+1=0$.

Lời giải.

a) Ta có phương trình tương đương

$$(z-i)\left(z^2+1\right)(z-i)\left(z^2+iz-1\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=i \\ z^2=-1 \\ z^2+iz-1=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=\pm i \\ z=\dfrac{\pm 3-i}{2} \end{array}\right.$$

b) Ta có phương trình tương đương

$$8z^3(z+1)=z+1 \Leftrightarrow (z+1)\left(8z^3-1\right)=0 \Leftrightarrow (z+1)(2z-1)\left(4z^2+2z+1\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=-1 \\ z=\dfrac{1}{2} \\ z=\dfrac{-1\pm i\sqrt{3}}{4} \end{array}\right.$$

c) Ta có phương trình tương đương

$$z^4+6z^3+9z^2=-100 \Leftrightarrow \left(z^2+3z\right)^2=100i^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z^2+3z+10i=0 \\ z^2+3z-10i=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=1\pm 2i \\ z=-4\pm 2i \end{array}\right.$$

d) Ta có phương trình tương đương

$$(z-1)\left(z^2-(1+2i)z-1+i\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=1 \\ z^2-(1+2i)z-1+i=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=1 \\ z=i \\ z=1+i \end{array}\right.$$

e) Ta có phương trình tương đương

$$(z-1)\left(z^3-3z^2+4z-12\right)=0 \Leftrightarrow (z-1)(z-3)\left(z^2+4\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=1 \\ z=3 \\ z=\pm 2i \end{array}\right.$$

f) Nhận thấy $z=0$ không phải nghiệm phương trình. Với $z\neq 0$ ta có phương trình tương đương

$$z^2-z+\frac{1}{2}+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}=0\Leftrightarrow\left(z-\frac{1}{z}\right)^2-\left(z-\frac{1}{z}\right)+\frac{5}{2}=0\Leftrightarrow z-\frac{1}{z}=\frac{1}{2}\pm\frac{3}{2}i$$

$$\Leftrightarrow 2z^2-(1\pm 3i)\,z-2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}z=1\pm i\\ z=-\dfrac{1}{2}\pm\dfrac{1}{2}i\end{array}\right.$$

6.21. Giải các phương trình sau :

a) $3\left(z^2-z+1\right)^2+7\left(z^2-z\right)+1=0.$

b) $\left(z^2+z\right)^2+4\left(z^2+z\right)-12=0.$

c) $\left(\dfrac{iz+3}{z-2i}\right)^2-3\left(\dfrac{iz+3}{z-2i}\right)-4=0.$

d) $\left(z^2+3z+6\right)^2+2z\left(z^2+3z+6\right)-3z^2=0.$

Lời giải.

a) Ta có phương trình tương đương

$$3\left(z^2-z+1\right)^2+7\left(z^2-z+1\right)-6=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}z^2-z+1=-3\\ z^2-z+1=\dfrac{2}{3}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}z=\dfrac{1\pm i\sqrt{15}}{2}\\ z=\dfrac{3\pm i\sqrt{3}}{6}\end{array}\right.$$

b) Ta có phương trình tương đương $\left[\begin{array}{l}z^2+z=2\\ z^2+z=-6\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}z=1\\ z=-2\\ z=\dfrac{-1\pm i\sqrt{23}}{2}\end{array}\right.$.

c) Điều kiện $z\neq 2i$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\left[\begin{array}{l}\dfrac{iz+3}{z-2i}=-1\\ \dfrac{iz+3}{z-2i}=4\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}iz+3=-z+2i\\ iz+3=4z-8i\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}z=\dfrac{-3+2i}{1+i}\\ z=\dfrac{3+8i}{4-i}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}z=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{5}{2}i\\ z=\dfrac{4}{17}+\dfrac{35}{17}i\end{array}\right.$$

d) Nhận thấy $z=0$ không phải nghiệm phương trình. Với $z\neq 0$ ta có phương trình tương đương

$$\left(\frac{z^2+3z+6}{z}\right)^2+2\left(\frac{z^2+3z+6}{z}\right)-3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\dfrac{z^2+3z+6}{z}=1\\ \dfrac{z^2+3z+6}{z}=-3\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}z^2+2z+6=0\\ z^2+6z+6=0\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}z=-1\pm i\sqrt{5}\\ z=-3\pm\sqrt{3}\end{array}\right.$$

§3. Dạng Lượng Giác Của Số Phức

6.22. Viết các số phức sau dưới dạng lượng giác :

a) $z=1+i.$

b) $z=\left(\sqrt{2}+i\sqrt{6}\right)^{99}.$

c) $z=\dfrac{\left(2-2i\sqrt{3}\right)^5}{\left(\sqrt{2}+i\sqrt{2}\right)^3}.$

d) $z=\dfrac{\left(\sqrt{3}+i\right)^7(1-i)^{10}}{\left(\sqrt{6}-i\sqrt{2}\right)^9}.$

Lời giải.

a) $z=1+i=\sqrt{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}i\right)=\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right).$

b) $z=\left(\sqrt{2}+i\sqrt{6}\right)^{99}=\left[2\sqrt{2}\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)\right]^{99}=2^{148}\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)^{99}$

$=2^{148}\sqrt{2}(\cos 33\pi+i\sin 33\pi)^{99}=2^{148}\sqrt{2}(\cos\pi+i\sin\pi)^{99}.$

c) $z = \dfrac{\left(2-2i\sqrt{3}\right)^5}{\left(\sqrt{2}+i\sqrt{2}\right)^3} = \dfrac{\left[4\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\right]^5}{\left[2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\right]^3} = \dfrac{4^5\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)^5}{2^3\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)^3}$

$= \dfrac{128\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{5\pi}{3}\right)\right)}{\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}} = 128\left(\cos\left(-\dfrac{29}{12}\right)+i\sin\left(-\dfrac{29\pi}{12}\right)\right).$

d) $z = \dfrac{\left(\sqrt{3}+i\right)^7(1-i)^{10}}{\left(\sqrt{6}-i\sqrt{2}\right)^9} = \dfrac{\left[2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)\right]^7\left[\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)\right]^{10}}{\left[2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)\right]^9}$

$= \dfrac{2^7\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)^7.2^5\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)^{10}}{2^{13}\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)^9}$

$= \dfrac{\left(\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6}\right)\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{5\pi}{2}\right)\right)}{2\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right)\right)} = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\left(\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}\right).$

6.23. Viết các số phức sau dưới dạng lượng giác :

a) $z = \cos\varphi - i\sin\varphi.$

b) $z = -\sin\dfrac{\pi}{8} - i\cos\dfrac{\pi}{8}.$

c) $z = \left(\cos\dfrac{\pi}{3} - i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)i^5\left(1+i\sqrt{3}\right)^7.$

d) $z = \cos\varphi + i\left(1+\sin\varphi\right).$

Lời giải.

a) $z = \cos\varphi - i\sin\varphi = \cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi).$

b) $z = -\sin\dfrac{\pi}{8} - i\cos\dfrac{\pi}{8} = \sin\left(-\dfrac{7\pi}{8}\right) + i\cos\left(-\dfrac{7\pi}{8}\right) = \cos\dfrac{11\pi}{8} + i\sin\dfrac{11\pi}{8}.$

c) $z = \left(\cos\dfrac{\pi}{3} - i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)i^5\left(1+i\sqrt{3}\right)^7 = \left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)\right)i\left(2\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)\right)^7$

$= \left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)\right)\left(\cos\dfrac{\pi}{2}+i\sin\dfrac{\pi}{2}\right)2^7\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)^7$

$= 128\left(\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)\left(\cos\dfrac{7\pi}{3}+i\sin\dfrac{7\pi}{3}\right) = 128\left(\cos\dfrac{\pi}{2}+i\sin\dfrac{\pi}{2}\right).$

d) $z = \sin\left(\varphi+\dfrac{\pi}{2}\right) + i\left(1-\cos\left(\varphi+\dfrac{\pi}{2}\right)\right) = 2\sin\left(\dfrac{\varphi}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)\left(\cos\left(\dfrac{\varphi}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\dfrac{\varphi}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)\right).$

Với $\sin\left(\dfrac{\varphi}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right) = 0$ thì $z = 0$ nên có dạng lượng giác không xác định.

Với $\sin\left(\dfrac{\varphi}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right) > 0$ thì z có dạng lượng giác $z = 2\sin\left(\dfrac{\varphi}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)\left(\cos\left(\dfrac{\varphi}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\dfrac{\varphi}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)\right).$

Với $\sin\left(\dfrac{\varphi}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right) < 0$ thì z có dạng lượng giác $z = -2\sin\left(\dfrac{\varphi}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)\left(\cos\left(\dfrac{\varphi}{2}+\dfrac{5\pi}{4}\right)+i\sin\left(\dfrac{\varphi}{2}+\dfrac{5\pi}{4}\right)\right).$

6.24. Thực hiện các phép tính sau :

a) $z = (1-i)^4\left(\sqrt{3}+i\right)^6.$

b) $z = \dfrac{\left(1-i\sqrt{3}\right)^{2013}}{(1+i)^{2000}}.$

c) $z = \left(\dfrac{5+3i\sqrt{3}}{1-2i\sqrt{3}}\right)^{21}.$

d) $z = \left(\dfrac{2+\sqrt{3}+i}{1-\sqrt{3}i}\right)^{2000}.$

Lời giải.

a) $z = \left(\sqrt{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}i\right)\right)^4\left(2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i\right)\right)^6 = 4\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right)^4 64\left(\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)^6$

$= 256\left(\cos(-\pi)+i\sin(-\pi)\right)\left(\cos\pi+i\sin\pi\right) = 256\left(\cos 0+i\sin 0\right).$

b) $z = \dfrac{\left(1-i\sqrt{3}\right)^{2013}}{(1+i)^{2000}} = \dfrac{\left[2\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\right]^{2013}}{\left[\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)\right]^{2000}} = \dfrac{2^{2013}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)^{2013}}{2^{1000}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)^{2000}}$

$= \dfrac{2^{1013}\left(\cos(-671\pi)+i\sin(-671\pi)\right)}{\cos 500\pi+i\sin 500\pi} = \dfrac{2^{1013}\left(\cos\pi+i\sin\pi\right)}{\cos 0+i\sin 0} = -2^{1013}.$

c) $z = \left(\dfrac{\left(5+3i\sqrt{3}\right)\left(1+2i\sqrt{3}\right)}{13}\right)^{21} = \left(-1+i\sqrt{3}\right)^{21} = \left(2\left(\cos\dfrac{2\pi}{3}+i\sin\dfrac{2\pi}{3}\right)\right)^{21}$

$$= 2^{21}\left(\cos\frac{42\pi}{3} + i\sin\frac{42\pi}{3}\right) = 2^{21}\left(\cos 14\pi + i\sin 14\pi\right) = 2^{21}.$$

d) $$z = \left(\frac{2+\sqrt{3}+i}{1-\sqrt{3}i}\right)^{2000} = \left(\frac{\sqrt{8+4\sqrt{3}}\left(\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{8+4\sqrt{3}}} + \frac{1}{\sqrt{8+4\sqrt{3}}}i\right)}{2\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)}\right)^{2000}$$

$$= \left(\frac{\sqrt{8+4\sqrt{3}}}{2}\frac{\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}}{\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)}\right)^{2000} = \left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)\right)^{2000}$$

$$= \left(2+\sqrt{3}\right)^{1000}\left(\cos\frac{500\pi}{3} + i\sin\frac{500\pi}{3}\right) = \left(2+\sqrt{3}\right)^{1000}\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$= \left(2+\sqrt{3}\right)^{1000}\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\left(2+\sqrt{3}\right)^{1000}\left(\sqrt{3}-1\right)}{2}.$$

6.25. Gọi z_1 và z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 - 2\sqrt{2}z + 8 = 0$. Tính $P = z_1^{2013} + z_2^{2013}$.

Lời giải. Ta có $\Delta' = 2 - 8 = -6 < 0$. Phương trình có hai nghiệm phức $z_{1,2} = \sqrt{2} \pm i\sqrt{6}$. Khi đó

$$\begin{aligned}
P = z_1^{2013} + z_2^{2013} &= \left(\sqrt{2} + i\sqrt{6}\right)^{2013} + \left(\sqrt{2} - i\sqrt{6}\right)^{2013} \\
&= \left[2\sqrt{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\right]^{2013} + \left[2\sqrt{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\right]^{2013} \\
&= 2^{3019}\sqrt{2}\left[\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)^{2013} + \left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)^{2013}\right] \\
&= 2^{3019}\sqrt{2}\left[\cos 671\pi + i\sin 671\pi + \cos\left(-671\pi\right) + i\sin\left(-671\pi\right)\right] \\
&= 2^{3019}\sqrt{2}.2\cos 671\pi = 2^{3020}\sqrt{2}\cos\pi = -2^{3020}\sqrt{2}
\end{aligned}$$

6.26. Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $z + \frac{1}{z} = 1$. Tìm số phức $w = z^{2000} + \frac{1}{z^{2000}}$.

Lời giải. Ta có $z + \frac{1}{z} \Leftrightarrow z^2 - z + 1 = 0 \Leftrightarrow z = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i \Leftrightarrow z = \cos\left(\pm\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\pm\frac{\pi}{3}\right)$. Khi đó

$$\begin{aligned}
w = z^{2000} + \frac{1}{z^{2000}} &= \left(\cos\left(\pm\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\pm\frac{\pi}{3}\right)\right)^{2000} + \frac{1}{\left(\cos\left(\pm\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\pm\frac{\pi}{3}\right)\right)^{2000}} \\
&= \cos\left(\pm\frac{2000\pi}{3}\right) + i\sin\left(\pm\frac{2000\pi}{3}\right) + \frac{1}{\cos\left(\pm\frac{2000\pi}{3}\right) + i\sin\left(\pm\frac{2000\pi}{3}\right)} \\
&= \cos\left(\pm\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\pm\frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(\mp\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\mp\frac{2\pi}{3}\right) \\
&= -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = -1 = \cos\pi + i\sin\pi
\end{aligned}$$

6.27. Tính tổng $S_n = (1+i)^n + (1-i)^n$. Từ đó suy ra S_{2012}.

Lời giải. Ta có $S_n = \left(\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right)^n + \left(\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)\right)^n = 2.2^{\frac{n}{2}}.\cos\frac{n\pi}{4}$.

Từ đó suy ra $S_{2012} = 2.2^{1006}.\cos\frac{2012\pi}{4} = 2^{1007}\cos\left(503\pi\right) = -2^{1007}$.

CÁC BÀI TOÁN THI

6.28. (THPTQG-2015) Cho số phức z thỏa mãn $(1-i)z - 1 + 5i = 0$. Tìm phần thực và phần ảo của z.

Lời giải. Ta có $(1-i)z - 1 + 5i = 0 \Leftrightarrow z = \frac{1-5i}{1-i} \Leftrightarrow z = 3 - 2i$.

Vậy z có phần thực là 3 và phần ảo là -2.

6.29. (A-2014) Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $z+(2+i)\overline{z}=3+5i$. Tìm phần thực và phần ảo của z.

Lời giải. Gọi $z=a+bi\ (a,b\in\mathbb{R})\Rightarrow\overline{z}=a-bi$, ta có :

$$\begin{aligned}z+(2+i)\overline{z}=3+5i &\Leftrightarrow a+bi+(2+i)\,(a-bi)=3+5i\\ &\Leftrightarrow 3a+b+(a-b)\,i=3+5i\\ &\Leftrightarrow \begin{cases}3a+b=3\\ a-b=5\end{cases}\\ &\begin{cases}a=2\\ b=-3\end{cases}\end{aligned}$$

Vậy z có phần thực là 2 và phần ảo là -3.

6.30. (B-2014) Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $2z+3(1-i)\overline{z}=1-9i$. Tìm môđun của z.

Lời giải. Gọi $z=a+bi\ (a,b\in\mathbb{R})\Rightarrow\overline{z}=a-bi$, ta có :

$$\begin{aligned}2z+3(1-i)\overline{z}=1-9i &\Leftrightarrow 2(a+bi)+(3-3i)(a-bi)=1-9i\\ &\Leftrightarrow 5a-3b-(3a+b)i=1-9i\\ &\Leftrightarrow \begin{cases}5a-3b=1\\ 3a+b=9\end{cases}\\ &\begin{cases}a=2\\ b=3\end{cases}\end{aligned}$$

Suy ra $z=2+3i$. Vậy $|z|=\sqrt{13}$.

6.31. (D-2014) Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $(3z-\overline{z})\,(1+i)-5z=8i-1$. Tìm môđun của z.

Lời giải. Gọi $z=a+bi\ (a,b\in\mathbb{R})\Rightarrow\overline{z}=a-bi$, ta có :

$$\begin{aligned}(3z-\overline{z})\,(1+i)-5z=8i-1 &\Leftrightarrow [3(a+bi)-(a-bi)]\,(1+i)-5(a+bi)=-1+8i\\ &\Leftrightarrow -3a-4b+(2a-b)i=-1+8i\\ &\Leftrightarrow \begin{cases}-3a-4b=-1\\ 2a-b=8\end{cases}\\ &\begin{cases}a=3\\ b=-2\end{cases}\end{aligned}$$

Suy ra $z=3-2i$. Vậy $|z|=\sqrt{13}$.

6.32. (CĐ-2014) Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $2z-i\overline{z}=2+5i$. Tìm phần thực và phần ảo của z.

Lời giải. Gọi $z=a+bi\ (a,b\in\mathbb{R})\Rightarrow\overline{z}=a-bi$, ta có :

$$\begin{aligned}2z-i\overline{z}=2+5i &\Leftrightarrow 2(a+bi)-i(a-bi)=2+5i\\ &\Leftrightarrow 2a-b+(2b-a)i=2+5i\\ &\Leftrightarrow \begin{cases}2a-b=2\\ 2b-a=5\end{cases}\\ &\begin{cases}a=3\\ b=4\end{cases}\end{aligned}$$

Vậy z có phần thực là 3 và phần ảo là 4.

6.33. (A-2013) Cho số phức $z = 1 + \sqrt{3}i$. Viết dạng lượng giác của z. Tìm phần thực và phần ảo của số phức $w = (1+i)z^5$.

Lời giải. Ta có $z = 2\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$.

Suy ra $z^5 = 32\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right) = 16\left(1 - \sqrt{3}i\right)$.

Do đó $w = 16(1+i)\left(1-\sqrt{3}i\right) = 16\left(1+\sqrt{3}\right) + 16\left(1-\sqrt{3}\right)i$.

Vậy w có phần thực là $16\left(1+\sqrt{3}\right)$ và phần ảo là $16\left(1-\sqrt{3}\right)$.

6.34. (D-2013) Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $(1+i)(z-i) + 2z = 2i$. Tính môđun của số phức $w = \dfrac{\overline{z} - 2z + 1}{z^2}$.

Lời giải. Ta có $(1+i)(z-i) + 2z = 2i \Leftrightarrow (3+i)z = -1+3i \Leftrightarrow z = i$.

Suy ra $w = \dfrac{-i-2i+1}{-1} = -1+3i$. Vậy $|w| = \sqrt{10}$.

6.35. (CĐ-2013) Cho số phức z thỏa $(3+2i)z + (2-i)^2 = 4+i$. Tìm phần thực và phần ảo của $w = (1+z)\overline{z}$.

Lời giải. Ta có $(3+2i)z + (2-i)^2 = 4+i \Leftrightarrow (3+2i)z = 1+5i \Leftrightarrow z = \dfrac{1+5i}{3+2i} = 1+i \Rightarrow \overline{z} = 1-i$.

Khi đó $w = (1+z)\,\overline{z} = (2+i)\,(1-i) = 3-i \Rightarrow w$ có phần thực là 3; phần ảo là -1.

6.36. (CĐ-2013) Giải phương trình $z^2 + (2-3i)z - 1 - 3i = 0$ trên tập hợp các số phức $\mathbb{C}$.

Lời giải. Ta có $\Delta = (2-3i)^2 + 4(1+3i) = -1 < 0$. Phương trình có hai nghiệm $\left[\begin{array}{l} z = -1+2i \\ z = -1+i \end{array}\right.$.

6.37. (A-2012) Cho số phức z thỏa mãn $\dfrac{5\,(\overline{z}+i)}{z+1} = 2-i$. Tính môđun của số phức $w = 1 + z + z^2$.

Lời giải. Gọi $z = a + bi\ (a, b \in \mathbb{R}) \Rightarrow \overline{z} = a - bi$. Ta có

$$\frac{5\,(\overline{z}+i)}{z+1} = 2-i \Leftrightarrow 5(a-bi+i) = (2-i)(a+bi+1)$$
$$\Leftrightarrow 3a - b + (a-7b)i = 2-6i \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 3a-b=2 \\ a-7b=-6 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a=1 \\ b=1 \end{array}\right. \Rightarrow z = 1+i$$

Suy ra $w = 1 + z + z^2 = 1 + 1 + i + (1+i)^2 = 2+3i$. Vậy $|w| = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$.

6.38. (B-2012) Gọi z_1 và z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 - 2\sqrt{3}iz - 4 = 0 = 0$. Viết dạng lượng giác của z_1 và z_2.

Lời giải. Ta có $\Delta' = 3i^2 + 4 = 1 > 0$. Phương trình có hai nghiệm $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$ và $z_2 = -1 + i\sqrt{3}$.

Khi đó $z_1 = 1 + i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

và $z_2 = -1 + i\sqrt{3} = 2\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$.

6.39. (D-2012) Cho số phức z thỏa mãn $(2+i)\,z + \dfrac{2\,(1+2i)}{1+i} = 7+8i$. Tìm môđun của số phức $w = z+1+i$.

Lời giải. Ta có $(2+i)\,z + \dfrac{2\,(1+2i)}{1+i} = 7+8i \Leftrightarrow (2+i)\,z + 3 + i = 7+8i \Leftrightarrow z = \dfrac{4+7i}{2+i} \Leftrightarrow z = 3+2i$.

Suy ra $w = z + 1 + i = 3 + 2i + 1 + i = 4 + 3i$. Vậy $|w| = \sqrt{16+9} = 5$.

6.40. (D-2012) Giải phương trình $z^2 + 3(1+i)z + 5i = 0$ trên tập hợp các số phức.

Lời giải. Ta có $\Delta = 9(1+i)^2 - 20i = -2i = (1+i)^2$.

Phương trình có hai nghiệm $\left[\begin{array}{l} z = \dfrac{-3-3i+1-i}{2} \\ z = \dfrac{-3-3i-1+i}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z = -1-2i \\ z = -2-i \end{array}\right.$.

6.41. (CĐ-2012) Cho số phức z thỏa mãn $(1-2i)\,z - \dfrac{2-i}{1+i} = (3-i)\,z$. Tìm tọa độ điểm biểu diễn của z trong mặt phẳng tọa độ Oxy.

Lời giải. Ta có $(1-2i)\,z - \dfrac{2-i}{1+i} = (3-i)\,z \Leftrightarrow (-2-i)z = \dfrac{1-3i}{2} \Leftrightarrow z = \dfrac{(1-3i)(-2+i)}{2(-2-i)(-2+i)} \Leftrightarrow z = \dfrac{1}{10} + \dfrac{7}{10}i$. Vậy tọa độ điểm biểu diễn số phức z là $\left(\dfrac{1}{10}; \dfrac{7}{10}\right)$.

6.42. (CĐ-2012) Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 - 2z + 1 + 3i = 0$. Tính $|z_1| + |z_2|$.

Lời giải. Ta có $\Delta' = 1 - (1+i) = -2i = (1-i)^2$. Phương trình có hai nghiệm $z = i$ hoặc $z = 2-i$.
Khi đó $|z_1| + |z_2| = |i| + |2-i| = 1 + \sqrt{5}$.

6.43. (A-2011) Tìm tất cả các số phức z, biết $z^2 = |z|^2 + \overline{z}$.

Lời giải. Gọi $z = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R}) \Rightarrow \overline{z} = a - bi$. Ta có

$$z^2 = |z|^2 + \overline{z} \Leftrightarrow (a+bi)^2 = a^2 + b^2 + a - bi \Leftrightarrow a + 2b^2 - (2ab + b)i = 0$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a + 2b^2 = 0 \\ 2ab + b = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a + 2b^2 = 0 \\ \left[\begin{array}{l} a = -\frac{1}{2} \\ b = 0 \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} a = 0 \\ b = 0 \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} a = -\frac{1}{2} \\ b = \pm\frac{1}{2} \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Vậy $z = 0,\ z = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}i$ hoặc $z = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}i$.

6.44. (A-2011) Tìm môđun của số phức z, biết $(2z-1)(1+i) + (\overline{z}+1)(1-i) = 2 - 2i$.

Lời giải. Gọi $z = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R}) \Rightarrow \overline{z} = a - bi$. Ta có

$$\begin{aligned} & (2z-1)(1+i) + (\overline{z}+1)(1-i) = 2 - 2i \\ \Leftrightarrow\ & (2a + 2bi - 1)(1+i) + (a - bi + 1)(1-i) = 2 - 2i \\ \Leftrightarrow\ & 2a + 2bi - 1 + 2ai + 2bi^2 - i + a - bi + 1 - ai + bi^2 - i = 2 - 2i \\ \Leftrightarrow\ & 3a - 3b + (a+b)i = 2 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 3a - 3b = 2 \\ a + b = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = \frac{1}{3} \\ b = -\frac{1}{3} \end{array}\right. \Rightarrow z = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}i \end{aligned}$$

Vậy $|z| = \sqrt{\dfrac{1}{9} + \dfrac{1}{9}} = \dfrac{\sqrt{2}}{3}$.

6.45. (B-2011) Tìm số phức z, biết $\overline{z} - \dfrac{5 + i\sqrt{3}}{z} - 1 = 0$.

Lời giải. Gọi $z = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R}, z \neq 0) \Rightarrow \overline{z} = a - bi$. Ta có

$$\overline{z} - \frac{5 + i\sqrt{3}}{z} - 1 = 0 \Leftrightarrow \overline{z}.z - 5 - i\sqrt{3} - z = 0 \Leftrightarrow (a - bi)(a + bi) - (a + bi) = 5 + i\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 - a - bi = 5 + i\sqrt{3} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a^2 + b^2 - a = 5 \\ b = -\sqrt{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} a = 2 \\ b = -\sqrt{3} \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} a = -1 \\ b = -\sqrt{3} \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Vậy $z = 2 - i\sqrt{3}$ hoặc $z = -1 - i\sqrt{3}$.

6.46. (B-2011) Tìm phần thực và phần ảo của số phức $z = \left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1+i}\right)^3$.

Lời giải. Ta có $z = \dfrac{\left(1+i\sqrt{3}\right)^2\left(1+i\sqrt{3}\right)}{(1+i)^2(1+i)} = \dfrac{\left(-2+2i\sqrt{3}\right)\left(1+i\sqrt{3}\right)}{-2+2i} = \dfrac{-8}{-2+2i} = 2+2i \Rightarrow$ phần thực là 2; phần ảo là 2.

6.47. (D-2011) Tìm số phức z, biết $z-(2+3i)\,\overline{z} = 1-9i$.

Lời giải. Gọi $z = a+bi\ (a,b\in\mathbb{R}) \Rightarrow \overline{z} = a-bi$. Ta có

$$z-(2+3i)\,\overline{z} = 1-9i \Leftrightarrow a+bi-(2+3i)(a-bi) = 1-9i \Leftrightarrow -a-3b-(3a-3b)i = 1-9i$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} -a-3b=1 \\ 3a-3b=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=-1 \end{cases}$$

Vậy $z = 2-i$.

6.48. (CĐ-2011) Cho số phức z thỏa mãn $(1+2i)^2z+\overline{z} = 4i-20$. Tính môđun của z.

Lời giải. Gọi $z = a+bi\ (a,b\in\mathbb{R}) \Rightarrow \overline{z} = a-bi$. Ta có

$$\begin{aligned}(1+2i)^2z+\overline{z} = 4i-20 &\Leftrightarrow (-3+4i)\,(a+bi)+a-bi = 4i-20\\ &\Leftrightarrow -3a-3bi+4ai+4bi^2+a-bi = 4i-20\\ &\Leftrightarrow -2a-4b+(4a-4b)i = -20+4i\\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -2a-4b=-20 \\ 4a-4b=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=4 \\ b=3 \end{cases} \Rightarrow z = 4+3i\end{aligned}$$

Vậy $|z| = \sqrt{16+9} = 5$.

6.49. (CĐ-2011) Cho số phức z thỏa mãn $z^2-2(1+i)z+2i = 0$. Tìm phần thực và phần ảo của $\dfrac{1}{z}$.

Lời giải. Ta có $z^2-2(1+i)z+2i = 0 \Leftrightarrow (z-1-i)^2 = 0 \Leftrightarrow z = 1+i$.
Suy ra $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{1+i} = \dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}i$.
Vậy $\dfrac{1}{z}$ có phần thực là $\dfrac{1}{2}$ và phần ảo là $-\dfrac{1}{2}$.

6.50. (A-2010) Tìm phần ảo của số phức z, biết $\overline{z} = \left(\sqrt{2}+i\right)^2\left(1-i\sqrt{2}\right)$.

Lời giải. Ta có $\overline{z} = \left(1+2\sqrt{2}i\right)\left(1-i\sqrt{2}\right) = 5+i\sqrt{2} \Rightarrow z = 5-i\sqrt{2} \Rightarrow$ phần thực là 5; phần ảo là $-\sqrt{2}$.

6.51. (A-2010) Cho số phức z thoả $\overline{z} = \dfrac{\left(1+i\sqrt{3}\right)^3}{1-i}$. Tìm môđun của số phức $\overline{z}+iz$.

Lời giải. Ta có $\overline{z} = \dfrac{\left(1+i\sqrt{3}\right)^2\left(1+i\sqrt{3}\right)}{1-i} = \dfrac{\left(-2+2i\sqrt{3}\right)\left(1+i\sqrt{3}\right)}{1-i} = -\dfrac{8}{1-i} = -4-4i \Rightarrow z = -4+4i$.
Khi đó $\overline{z}+iz = -4-4i+i(-4+4i) = -8-8i$. Vậy $|\overline{z}+iz| = \sqrt{64+64} = 8\sqrt{2}$.

6.52. (B-2010) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tìm tập hợp điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn $|z-i| = |(1+i)z|$.

Lời giải. Gọi $z = x+yi\ (x,y\in\mathbb{R})$, ta có :

$$\begin{aligned}|z-i| = |(1+i)z| &\Leftrightarrow |x+yi-i| = |(1+i)\,(x+yi)|\\ &\Leftrightarrow x^2+(y-1)^2 = (x-y)^2+(x+y)^2\\ &\Leftrightarrow x^2+y^2+2y-1 = 0\end{aligned}$$

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là đường tròn có phương trình $x^2+y^2+2y-1 = 0$.

6.53. (D-2010) Tìm số phức z thỏa mãn $|z| = \sqrt{2}$ và z^2 là số thuần ảo.

Lời giải. Gọi $z = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R}) \Rightarrow z^2 = a^2 - b^2 + 2abi$. Theo giả thiết ta có

$$\begin{cases} \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{2} \\ a^2 - b^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 1 \\ b^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \pm 1 \\ b = \pm 1 \end{cases}$$

Vậy có bốn số phức cần tìm là $z = 1 + i,\ z = 1 - i,\ z = -1 + i$ và $z = -1 - i$.

6.54. (CĐ-2010) Cho số phức z thỏa $(2 - 3i)\, z + (4 + i)\, \overline{z} = -(1 + 3i)^2$. Tìm phần thực và phần ảo của z.

Lời giải. Gọi $z = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R}) \Rightarrow \overline{z} = a - bi$. Ta có

$$\begin{aligned} (2-3i)\, z + (4+i)\, \bar{z} = -(1+3i)^2 &\Leftrightarrow (2-3i)\,(a+bi) + (4+i)\,(a-bi) = 8 - 6i \\ &\Leftrightarrow 6a + 4b - (2a+2b)i = 8 - 6i \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 6a + 4b = 8 \\ 2a + 2b = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 5 \end{cases} \end{aligned}$$

Phần thực là -2; phần ảo là 5.

6.55. (CĐ-2010) Giải phương trình $z^2 - (1 + i)z + 6 + 3i = 0$ trên tập hợp các số phức $\mathbb{C}$.

Lời giải. Ta có $\Delta = (1+i)^2 - 4(6+3i) = -24 - 10i = (1-5i)^2$. Phương trình có hai nghiệm $\left[\begin{array}{l} z = 1 - 2i \\ z = 3i \end{array}\right.$.

6.56. (A-2009) Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 + 2z + 10 = 0$. Tính $A = |z_1|^2 + |z_2|^2$.

Lời giải. Ta có $\Delta' = 1 - 10 = -9 < 0$. Phương trình có hai nghiệm $z_{1,2} = -1 \pm 3i$.
Khi đó $A = |z_1|^2 + |z_2|^2 = A = |-1+3i|^2 + |-1-3i|^2 = \left(\sqrt{1+9}\right)^2 + \left(\sqrt{1+9}\right)^2 = 20$.

6.57. (B-2009) Tìm số phức z thỏa mãn $|z - (2 + i)| = \sqrt{10}$ và $z.\overline{z} = 25$.

Lời giải. Gọi $z = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$. Ta có

$$\begin{aligned} &\begin{cases} |z-(2+i)| = \sqrt{10} \\ z.\bar{z} = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |a+bi-2-i| = \sqrt{10} \\ (a+bi)(a-bi) = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-2)^2 + (b-1)^2 = 10 \\ a^2 + b^2 = 25 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 - 4a - 2b = 5 \\ a^2 + b^2 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 10 - 2a \\ a^2 + b^2 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = 5 \\ b = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} a = 3 \\ b = 4 \end{cases} \end{array}\right. \end{aligned}$$

Vậy $z = 5$ hoặc $z = 3 + 4i$.

6.58. (D-2009) Tìm tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thoả mãn điều kiện $|z - (3 - 4i)| = 2$.

Lời giải. Gọi $z = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$. Ta có

$$|z - (3-4i)| = 2 \Leftrightarrow |x + yi - 3 + 4i| = 2 \Leftrightarrow |x - 3 + (y+4)i| = 2 \Leftrightarrow (x-3)^2 + (y+4)^2 = 4$$

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là đường tròn tâm $I(3; -4)$ và bán kính $R = 2$.

6.59. (CĐ-2009) Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $(1 + i)^2\,(2 - i)\, z = 8 + i + (1 + 2i)\, z$. Tìm phần thực và phần ảo của z.

Lời giải. Ta có $(1+i)^2\,(2-i)\, z = 8 + i + (1+2i)\, z \Leftrightarrow (2+4i)\, z = 8 + i + (1+2i)\, z \Leftrightarrow (1+2i)\, z = 8 + i$
$\Leftrightarrow z = \dfrac{8+i}{1+2i} \Leftrightarrow z = \dfrac{(8+i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} \Leftrightarrow z = \dfrac{10-15i}{5} \Leftrightarrow z = 2 - 3i \Rightarrow$ phần thực là 2; phần ảo là -3.

6.60. (CĐ-2009) Giải phương trình $\dfrac{4z - 3 - 7i}{z - i} = z - 2i$ trên tập hợp các số phức $\mathbb{C}$.

Lời giải. Với điều kiện $z \neq i$, phương trình đã cho tương đương với $z^2 - (4 + 3i)z + 1 + 7i = 0$.
Ta có $\Delta = (4+3i)^2 - 4(1+7i) = 3 - 4i = (2-i)^2$. Phương trình có hai nghiệm $\left[\begin{array}{l} z = 1 + 2i \\ z = 3 + i \end{array}\right.$.